29/09/14

Διαφορική Εξίσωση είναι μια εξίσωση που περιέχει παραγώγους (διαφορικά) της άγνωστης συνάρτησης

Παράδειγμα (η πιο απλή διαφορική εξίσωση)
Γραμμική ΣΔΕ α' τάξης $y'(x) + p(x) \cdot y(x) = q(x)$ όπου
x : ανεξάρτητη μεταβλητή
$y(x)$: άγνωστη συνάρτηση

ΣΔΕ (Ordinary Differential Equation)
(μια ανεξάρτητη μεταβλητή) $y(x)$
ΜΔΕ (Partial Differential Equation)
(περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές) $f(x,y,\dots)$

Π.Α.Τ ΣΔΕ + αρχικές συνθήκες
παράδειγμα
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a, B] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$
παρατήρηση η ΣΔΕ είναι α' τάξης άρα χρειαζόμαστε 1 αρχική συνθήκη για να έχουμε ΠΑΤ

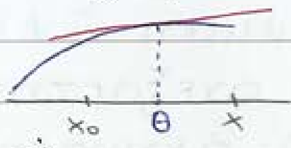
Π.Σ.Τ. ΣΔΕ + συνοριακές συνθήκες
παράδειγμα
$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, B] \\ y(a) = y_0, & y(B) = y_1 \end{cases}$$

Ανάπτυγμα Taylor
(1) Συναρτήσεις μιας μεταβλητής
Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ και $f: I \to \mathbb{R}$ $n+1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο I και $x_0 \in I$.
Τότε $\forall x \in I$ $\exists \theta = \theta(x)$ μεταξύ των x_0, x τ.ω.
$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta) =$$
$$f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)$$
(ανάπτυγμα Taylor της f στο x_0)

Παρατήρηση

(1) Για $n=0$, το ανάπτυγμα Taylor γράφεται:
$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\cdot f'(\theta)$ δηλαδή ανάγεται στο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Απειροστικού Λογισμού.

Σημασία: Μπορούμε να προσεγγίσουμε την παράγωγο $f'(\theta) = \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$



(2) Πολυώνυμο Taylor: $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0)$

Υπόλοιπο (κατά Lagrange) ή σφάλμα του Taylor
$$f(x) - p_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)$$

Σημασία: Μπορούμε να προσεγγίσουμε την f με ένα πολυώνυμο.

(2) Συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοιχτό και κυρτό σύνολο.

Υπενθύμιση

(a) Ω ανοιχτό $\Leftrightarrow (\forall x \in \Omega)(\exists \epsilon = \epsilon(x) > 0) : B(x, \varepsilon) \subseteq \Omega$

(b) Ω κυρτό $\Leftrightarrow (\forall\, a, b \in \Omega)\ (\forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ με $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0) : \lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot b \in \Omega$

δηλαδή το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία του Ω περιέχεται στο Ω

Έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $n+1$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο Ω (δηλαδή $\exists$ οι μερικές παράγωγοι μέχρι $n+1$ τάξης και είναι συνεχείς συναρτήσεις)

Υπενθύμιση

(1) Ορισμός συνέχειας συνάρτησης μιας μεταβλητής)
(τοπικός ορισμός (ισχύει για σημείο))

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \leftrightarrow (\forall \epsilon>0)(\exists \delta>0) : (\forall x \in D(f)) \text{ με } |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

(2) Ορισμός συνέχειας συνάρτησης 2 μεταβλητών.

$$\lim_{x\to x_0,\, y\to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0) \leftrightarrow$$

$$(\forall \epsilon>0)(\exists \delta>0) : (\forall\ x,y \in \Omega) \text{ με } \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

Έστω $(x_0,y_0)\in\Omega$ τότε $\exists\ (\xi,\theta)$ τ.ω.

$$f(x,y) = \sum_{\substack{i+j=0\\ i,j\geq 0}}^{n} \frac{(x-x_0)^i(y-y_0)^j}{i!\ j!} \frac{\partial^{(i+j)} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0,y_0) + \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(x-x_0)^i(y-y_0)^{n+1-i}}{i!\,(n+1-i)!} \frac{\partial^{(n+1)} f}{\partial x^i \cdot \partial y^{n+1-i}}(\xi,\theta).$$

Παρατήρηση

(1) Για $n=1$:

$$f(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)} = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\theta) + (x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\theta) + \frac{(y-y_0)^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\theta)$$

(2) πολυώνυμο Taylor της f στο σημείο (x_0,y_0)

$$P_n(x,y) = \sum_{\substack{i+j=0\\ i,j\geq 0}}^{n} \frac{(x-x_0)^i(y-y_0)^j}{i!\ j!} \frac{\partial^{(i+j)} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0,y_0)$$

είναι πολυώνυμο 2 μεταβλητών, βαθμού το πολύ n

Αντικείμενα του μαθήματος

1. Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

Έστω $f: [a, B] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ και $y_0 \in \mathbb{R}$.

Αναζητούμε μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $y: [a, B] \to \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & , a \le t \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Προβλήματα που θα μας απασχολήσουν:

(α) ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του Π.Α.Τ.

(β) ευστάθεια (συνεχής εξάρτηση από τις αρχ. συνθήκες)

2. Μέθοδος Euler

Υποθέτουμε ότι το Π.Α.Τ έχει μία λύση, την y.

Θεωρούμε μια διαμέριση του $[a, b]$ με βήμα $h = (b-a)/N$, $N \in \mathbb{N}$. Οι κόμβοι της διαμέρισης είναι $t^n = a + nh$, $n = 0, \dots, N$

a $t^1 = t_0 + h$ $t^2 = t_0 + 2h$

$t^0 = a$

Τότε, ανάγουμε το αρχικό συνεχές πρόβλημα στο διακριτό:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) & \text{(ακολουθία τιμών της } y) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

3. Μέθοδος Runge-Kutta (RK)

4. Πολυβηματικές μέθοδοι (Adams Bashgorth)

5. Το πρόβλημα δύο σημείων

→ πεπερασμένες διαφορές

→ Galerkin.

Παρατήρηση

Οι μέθοδοι Euler και Runge-Kutta είναι μέθοδοι ενός βήματος, δηλαδή της μορφής $y_{n+1} = f(y_n)$

08/10/14

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (Π.Α.Τ)

Ζητείται συνάρτηση $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$(1) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ με $a<b$,

$f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y_0 \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε ότι η f είναι συνεχής για $(t,y) \in [a,b] \times \mathbb{R}$

Συμβολισμός: $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$

Λύση του Π.Α.Τ λέγεται κάθε συνάρτηση $y \in C^1([a,b])$ (δηλαδή είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a,b]$) η οποία ικανοποιεί τη Σ.Δ.Ε του (1) και την αρχική συνθήκη (Α.Σ) $y(a) = y_0$

Ένα Π.Α.Τ λέγεται well-posed αν-ν έχει λύση η οποία είναι μοναδική και εξαρτάται συνεχώς από τα αρχικά δεδομένα.

Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του ΠΑΤ (1)

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1. Η f είναι πολυώνυμο α' βαθμού ως προς y.

Τότε το Π.Α.Τ γράφεται:

$$(2) \begin{cases} y'(t) = p(t)y(t) + q(t), & t \in [a,b] \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η ΣΔΕ του ΠΑΤ (2) είναι γραμμική. Αν $p, q \in C([a,b])$ τότε το (2) έχει μοναδική λύση η οποία είναι:

$$y(t) = e^{\int_a^t p(s)\,ds} \left[y_0 + \int_a^t e^{-\int_a^s p(\tau)d\tau} \cdot q(s)\,ds \right], \quad t \in [a,b]$$

Παρατήρηση

Για γενική συνάρτηση f τα πράγματα είναι πιο δύσκολα. Γενικά, όχι μόνο δε μπορούμε να δώσουμε λύση σε κλειστή μορφή, αλλά δε μπορούμε καν να εγγυηθούμε για την ύπαρξη ή τη μοναδικότητα λύσης.

2. Παράδειγμα 1.

$$\begin{cases} y' = y^2, & 0 \le t \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η ΣΔΕ του Π.Α.Τ είναι μη γραμμική. Επιπλέον, η y' είναι μη αρνητική και επομένως η $y(t)$ θα είναι αύξουσα.

Άρα $t \ge 0 \Rightarrow y(t) \ge y(0) = 1$

Δηλαδή η y λαμβάνει μη μηδενικές τιμές.

Η ΣΔΕ. γράφεται: $\dfrac{y'(t)}{(y(t))^2} = 1 \Leftrightarrow$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y(t)}\right) = 1.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$-\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y(t)}\right) = \int_0^t d\tau \Leftrightarrow -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(0)} = t$$

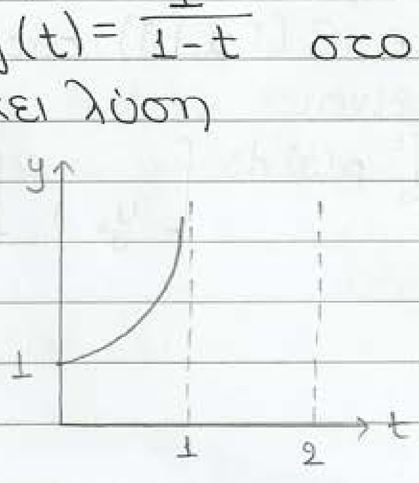
$$\Leftrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in [0,1)$$

Συμπέρασμα:

το Π.Α.Τ έχει λύση την $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$ στο $[0,1)$ ενώ στο $[1,2]$ δεν υπάρχει λύση

Παρατήρηση:

Όταν $t \to 1$, $y(t) \to \infty$



3. Παράδειγμα 2.

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} \quad , \quad 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η $y(t)=0$, $t \in [0,1]$ είναι λύση του Π.Α.Τ (τετριμένη λύση).

Ερώτημα: Υπάρχει άλλη λύση του ΠΑΤ;

Έστω $y(t) \neq 0$, $t \in [0,1]$

Η Σ.Δ.Ε γράφεται: $\dfrac{y'(t)}{\sqrt{|y(t)|}} = 1$, $t \in [0,1]$.

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(\sqrt{|y(t)|}\right)' = 1 \quad , \quad t \in [0,1]$$

Αφού για να ορίζεται η Σ.Δ.Ε πρέπει $y(t) \ge 0$, $t \in [0,1]$ και υποθέσαμε ότι $y(t) \neq 0$, $t \in [0,1]$ θα είναι: $y(t) > 0$, $t \in [0,1]$. Άρα μπορούμε να γράψουμε:

$2\left(\sqrt{y(t)}\right)' = 1$. Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$2\int_{t^*}^{t} \left(\sqrt{y(s)}\right)' ds = \int_{t^*}^{t} ds \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{y(t)} - \sqrt{y(t^*)} = \frac{t - t^*}{2}$$

Αν θεωρήσουμε $t^* = 0$, θα έχουμε $\sqrt{y(t^*)} = 0$ και επομένως η $y(t) = \dfrac{t^2}{4}$, $t \in [0,1]$.

Συμπέρασμα:

Δεν υπάρχει μοναδική λύση γι' αυτό το Π.Α.Τ.

Παρατήρηση:

Λύσεις προβλημάτων που δε λύνονται μονοσήμαντα είναι πολύ δύσκολο να προσεγγιστούν. Στην περίπτωση προβλημάτων με μια ακριβώς λύση τα πράγματα είναι απλούστερα

Θεώρημα Ύπαρξης & μοναδικότητας λύσης του (1)

Έστω $f: [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, η οποία επιπλέον πληροί τη συνθήκη Lipschitz ως προς y ομοιόμορφα ως προς t. Τότε $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ το ΠΑΤ(1) λύνεται μονοσήμαντα (δηλαδή έχει μοναδική λύση)

Υπενθύμιση

Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f: [a,b] \times \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς y ομοιόμορφα ως προς t αν-ν $(\exists L > 0)(\forall t \in [a,b])(\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R})$ $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$ *

Παρατηρήσεις

1. Η συνθήκη Lipschitz είναι πολύ περιοριστική. γι' αυτό το εν λόγω θεώρημα είναι μεν πολύ ισχυρό, ωστόσο είναι δύσκολο να εφαρμοστεί.

2. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη ως προς τη 2η μεταβλητή (δηλαδή ως προς y) και ισχύει ότι: $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall t \in [a,b])(\forall y \in \mathbb{R})\ |f_y(t,y)| \leq M$ (δηλαδή η f_y είναι φραγμένη), τότε η f πληροί τη συνθήκη Lipschitz με σταθερά $L = M$.

[Απόδειξη

Από το Θ.Μ.Τ του Απειροστικού Λογισμού έχουμε:
$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$: $f(t,y_1) - f(t,y_2) = f_y(t,\tilde{y}) \cdot (y_1 - y_2)$
όπου $\tilde{y} \in (y_1, y_2)$.
Επομένως, $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |f_y(t,\tilde{y})| \cdot |y_1 - y_2| \leq M\,|y_1 - y_2|$ δηλαδή ικανοποιείται η συνθήκη Lipschitz]

Αυτό ισχύει μόνο στην περίπτωση που η f είναι της μορφής: $f(t,y) = p(t)y + q(t)$ (γραμμικό πολυώνυμο)
ή $f(t,y) = p(t) \cdot \sin y$
ή $f(t,y) = p(t) \cdot \cos y$

Παράδειγμα

$f(t,y) = (y(t))^2$

Είναι: $f_y(t,y) = 2y(t)$

Για $y \to \pm\infty$ ισχύει ότι $|f_y(t,y)| \to +\infty$ δηλαδή η f_y δεν είναι φραγμένη συνάρτηση.

Επομένως η f δεν ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz.

3. Αν η συνθήκη Lipschitz ισχύει $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ τότε λέγεται ολική. Άρα:
Αν η f είναι συνεχής και πληροί (ως προς y) μια ολική συνθήκη Lipschitz τότε το ΠΑΤ (1) έχει μοναδική λύση σε όλο το διάστημα $[a,b]$.

Θεώρημα Τοπικής Ύπαρξης & Μοναδικότητας λύσης του (1)

Έστω $c>0$ και $f \in C([a,b] \times [y_0-c, y_0+c] ; \mathbb{R})$.
Αν η f πληροί στο $[a,b] \times [y_0-c, y_0+c]$ τη συνθήκη Lipschitz ως προς y ομοιόμορφα ως προς t (δηλαδή
* $(\exists L \geq 0)(\forall t \in [a,b])(\forall y_1, y_2 \in [y_0-c, y_0+c])$:
* $|f(y_1,t) - f(y_2,t)| \leq L|y_1 - y_2|$) τότε το ΠΑΤ (1) λύνεται μονοσήμαντα τουλάχιστον στο διάστημα $[a,b']$ όπου $b' = \min\left(b, a+\frac{c}{A}\right)$, $A = \max\limits_{\substack{t\in[a,b] \\ y\in[y_0-c,\, y_0+c]}} |f(t,y)|$.

Παρατηρήσεις.

1. Αν $|f| \to +\infty$ τότε το διάστημα $[a,b']$ είναι πολύ μικρό δηλαδή είναι της μορφής $[a, a+\delta]$ με $\delta \to 0$.
2. Η συνθήκη ** είναι πολύ πιο ασθενής από την *
Ειδικότερα, ισχύει το εξής:
κάθε συνάρτηση $f \in C([a,b] \times [y_0-c, y_0+c]$ η οποία είναι συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς y στο $[y_0-c, y_0+c]$ ικανοποιεί τη **.
(το θεώρημα αυτό είναι λιγότερο ισχυρό από το προηγούμενο, έχει όμως μεγαλύτερη εφαρμογή)

Υπενθύμιση [ΑΠΕΙ Ι].

(α) f ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow$ f συνεχής

(β) f συνεχής σε κλειστό διάστημα $\to$ f ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Γενικά, f συνεχής σε ανοιχτό διάστημα $\not\Rightarrow$ f ομοιόμορφα συνεχής

Όμως, αν η f είναι συνεχής σε ανοιχτό διάστημα (a,b) και $\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to b^-} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$ τότε

η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Παρατήρηση

Η συνέχεια της f εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης του Π.Α.Τ (1) σε κάποιο διάστημα της μορφής $[a,c]$ $c>a$, δεν εξασφαλίζει όμως τη μοναδικότητά της.

Παράδειγμα

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|} & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$f(y) = \sqrt{|y|}$, $0 \le t \le 1$

Η $y(t)=0$, $0 \le t \le 1$ είναι λύση του Π.Α.Τ. Αν $y \neq 0$

$$f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Η $f' = f_y$ δεν είναι φραγμένη διότι αν $y \to 0$ τότε $f' \to +\infty$

και επομένως δεν ισχύει η συνθήκη Lipschitz (ολική) σε οποιοδήποτε διάστημα που περιέχει το 0.

Επιπλέον, η $f' = f_y$ δεν είναι συνεχής σε οποιοδήποτε διάστημα περιέχει το $0 \Rightarrow$

η f δεν πληροί την τοπική συνθήκη Lipschitz σε οποιοδήποτε διάστημα περιέχει το 0

Ευστάθεια λύσης του Π.Α.Τ

Έστω $y(t)$ η ακριβής και $z(t)$ η προσεγγιστική λύση του Π.Α.Τ.
Αν $|y(t)-z(t)| \leq \varepsilon(t)$ και $\varepsilon(t) \to 0$ μπορούμε να πούμε ότι το Π.Α.Τ είναι ευσταθές.

Για δοσμένες αρχικές τιμές $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα ΠΑΤ:

(3) $\begin{cases} y' = f(t, y(t)), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} z' = f(t, z(t)), & t \in [a,b] \\ z(a) = z_0 \end{cases}$

1η περίπτωση: Η f ικανοποιεί την ολική συνθήκη Lipschitz

Τα Π.Α.Τ (3) και (4) έχουν μοναδικές λύσεις $y, z \in C^1([a,b])$.
Θέτουμε $\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$.
Θέλουμε να εκτιμήσουμε την $|\varepsilon(t)|$.
Ισχύει: $|y(a) - z(a)| = |y_0 - z_0|$

$$\varepsilon'(t) = y'(t) - z'(t) = f(t, y(t)) - f(t, z(t))$$

Πολλαπλασιάζοντας με $2\varepsilon(t)$ έχουμε:

$$2\varepsilon(t) \cdot \varepsilon'(t) = 2[f(t,y(t)) - f(t,z(t))] \cdot \varepsilon(t) \Rightarrow$$
$$(\varepsilon^2(t))' = 2 \cdot [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] \cdot \varepsilon(t)$$

Λόγω της ολικής συνθήκης Lipschitz θα είναι:

$$(\varepsilon^2(t))' \leq 2L \cdot \varepsilon^2(t), \quad t \in [a,b].$$

Θέτοντας $\varepsilon^2(t) = \varphi(t)$ έχουμε: $\varphi'(t) - 2L\varphi(t) \leq 0$
$t \in [a,b]$ (5)

Πολλαπλασιάζουμε την (5) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{-2Lt} και έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-2Lt} \cdot \varphi(t)\right) \leq 0, \quad t \in [a,b]$$

Τότε η συνάρτηση $e^{-2Lt}\cdot\varphi(t)$, $t\in[a,b]$ είναι φθίνουσα.

Επομένως, $t \geq a \Rightarrow e^{-2Lt}\varphi(t) \leq e^{-2La}\cdot\varphi(a)$

$$\Rightarrow [e^{-Lt}\cdot\varepsilon(t)]^2 \leq [e^{-La}\cdot\varepsilon(a)]^2$$

$$\Rightarrow e^{-Lt}|\varepsilon(t)| \leq e^{-La}|y_0 - z_0|$$

$$\Rightarrow |\varepsilon(t)| \leq e^{L(t-a)}|y_0 - z_0|, \quad t\in[a,b]$$

Άρα $$\max_{t\in[a,b]}|y(t)-z(t)| \leq e^{L(b-a)}|y_0 - z_0| \quad (6)$$

Υπενθύμιση

Νόρμα απείρου: $\|y\|_\infty = \max_{t\in[a,b]}|y(t)|$

Παρατήρηση

Η (6) εκφράζει τη συνεχή εξάρτηση των λύσεων του ΠΑΤ (1) στη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ από τα αρχικά δεδομένα $y_0 \in \mathbb{B}$

Παρατήρηση

Στο δεξί μέλος της (6) εμφανίζεται μια σταθερά (η $e^{L(b-a)}$) που αυξάνεται εκθετικά με το L.

Συνεπώς, όταν η σταθερά L είναι μεγάλη, η εκτίμηση της λύσης δεν είναι καλή.

13/10/14

Επανάληψη στα προηγούμενα.

Τοποθέτηση του προβλήματος (Π.Α.Τ)

Ζητάμε συνάρτηση $y: [a,b] \to \mathbb{B}$ τέτοια ώστε:

$$(*)\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Λύση του Π.Α.Τ

Αν $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$ τότε κάθε συνάρτηση $y \in C^1([a,b])$ που ικανοποιεί το ΠΑΤ ονομάζεται λύση του προβλήματος

Θεώρημα Ολικής Ύπαρξης & Μοναδικότητας για Σ.Δ.Ε

Αν $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$ και πληροί τη συνθήκη Lipschitz, δηλαδή $\exists L \geq 0$, $\forall t \in [a,b]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$: $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ τότε $\forall y_0 \in \mathbb{R}$ το ΠΑΤ $(*)$ λύνεται μονοσήμαντα.

Θεώρημα Τοπικής Ύπαρξης & Μοναδικότητας για ΣΔΕ

Έστω $c > 0$ και $f \in C([a,b] \times [y_0 - c, y_0 + c])$ και η f πληροί στο $[y_0 - c, y_0 + c]$ τη συνθήκη Lipschitz, δηλαδή $\exists L \geq 0$, $\forall t \in [a,b]$, $\forall y_1, y_2 \in [y_0 - c, y_0 + c]$: $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$

Τότε το ΠΑΤ $(*)$ λύνεται μονοσήμαντα τουλάχιστον στο $[a, b']$ όπου $b' = \min\{b, a + \frac{c}{A}\}$ με $A = \max\limits_{\substack{t \in [a,b] \\ y \in [y_0 - c, y_0 + c]}} |f(t,y)|$.

Ευστάθεια λύσης για Σ.Δ.Ε.

Για δοσμένα $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα ΠΑΤ:

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} z' = f(t,z), & t \in [a,b] \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

1η περίπτωση Η f ικανοποιεί την ολική συνθήκη lipschitz.

Δείξαμε ότι ισχύουν τα εξής:

$$|\varepsilon(t)| = |y(t) - z(t)| \leq e^{L(t-a)} |y_0 - z_0| = e^{L(t-a)} |\varepsilon(a)|$$

και $\max\limits_{a \leq t \leq b} |y(t) - z(t)| \leq e^{L(b-a)} |\varepsilon_0|$, $\varepsilon_0 = \varepsilon(a)$

κ α ι ν ο ύ ρ ι α ύ λ η

2η περίπτωση Η f ικανοποιεί τη συνθήκη:

(12) $\forall t \in [a,b]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$: $(f(t,y_1) - f(t,y_2))(y_1 - y_2) \leq 0$

Η συνθήκη αυτή ονομάζεται "μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz".

Παρατήρηση

Κίνητρο γι' αυτή τη συνθήκη προέρχεται από τις εφαρμογές και για να μπορέσουμε αργότερα να τη γενικεύσουμε για την περίπτωση συστημάτων ΣΔΕ.

Παρατήρηση - Πρόταση

Στη βαθμωτή περίπτωση η (12) σημαίνει ότι η f είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς τη $2^{η}$ μεταβλητή (y) για κάθε τιμή της $1^{ης}$ μεταβλητής (t).

Απόδειξη

Έχουμε: $\varepsilon(t)\cdot\varepsilon'(t) = \varepsilon(t)\left(f(t,y)-f(t,z)\right) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon^2(t)\right) = \left(f(t,y)-f(t,z)\right)\cdot(y-z) \overset{(12)}{\leq} 0$$

$\forall t\in[a,b]$.

Συνεπώς η συνάρτηση $\varepsilon^2(t)$ είναι φθίνουσα $\forall t\in[a,b]$

Δηλαδή $t\geq a \Rightarrow \varepsilon^2(t)\leq\varepsilon^2(a) \Rightarrow |\varepsilon(t)|\leq|\varepsilon(a)|$

Επομένως $\displaystyle\max_{t\in[a,b]}|y(t)-z(t)| \leq |y_0-z_0| \quad (13)$

Παρατήρηση

(α) Στη (13) δεν υπεισέρχεται η σταθερά Lipschitz.

(β) Από τη (13) έπεται η μοναδικότητα της λύσης του ΠΑΤ ⊛. Δηλαδή αν υπάρχει λύση, τότε είναι μοναδική.

Απόδειξη.

Έστω y_1, y_2 λύσεις του ⊛. Τότε λόγω της (13) θα είναι: $\displaystyle\max_{t\in[a,b]}|y_1(t)-y_2(t)| \leq |y_0-y_0|=0$

Επομένως $|y_1(t)-y_2(t)|=0 \Leftrightarrow y_1(t)=y_2(t),\ t\in[a,b]$

(γ) Η ύπαρξη λύσης εξασφαλίζεται από την προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής στο $[a,b]\times\mathbb{R}$.

Απόδειξη

- Η τοπική ύπαρξη λύσης σ' ένα διάστημα $[a,b')$ εξασφαλίζεται από τη συνέχεια της f.

• Για ολική ύπαρξη λύσης στο διάστημα $[a,b]$ θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (12) για ν.δ.ο οι λύσεις y αν υπάρχουν θα είναι φραγμένες στο $[a,b]$.

Έχουμε: $y'(t)=f(t,y) \Rightarrow$

$y'(t) = f(t,y) - f(t,y_0) + f(t,y_0)$

Άρα $y'(t)\cdot y(t) = [f(t,y)-f(t,y_0)]y(t) + f(t,y_0)\cdot y(t)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[y^2(t)]' = \underbrace{[f(t,y)-f(t,y_0)]\,y(t)}_{\text{μη θετικός}} + f(t,y_0)\cdot y(t)$$

$$\text{Επομένως}\quad [y^2(t)]' \leq 2f(t,y_0)\cdot y(t) \overset{(a-b)^2\geq 0}{\leq} f^2(t,y_0) + y^2(t)$$

$$\text{Συνεπώς}\quad [y^2(t)]' - y^2(t) \leq f^2(t,y_0)$$

Πολλαπλασιάζοντας με τον ολοκληρωτικό παράγοντα e^{-t} έχουμε:

$$e^{-t}[y^2(t)]' - e^{-t}[y^2(t)] \leq e^{-t}f^2(t,y_0) \Leftrightarrow$$

$$[e^{-t}y^2(t)]' \leq e^{-t}f^2(t,y_0)$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$\int_a^t [e^{-s}y^2(s)]'\,ds \leq \int_a^t e^{-s}f^2(s,y_0)\,ds \longrightarrow$$

$$e^{-t}y^2(t) - e^{-a}y^2(a) \leq \int_a^t e^{-s}f^2(s,y_0)\,ds \Rightarrow$$

$$y^2(t) \leq e^t\left[e^{-a}y^2(a) + \int_a^t e^{-s}f^2(s,y_0)\,ds\right],\ t\in[a,b]$$

$$\leq e^b\left[e^{-a}y^2(a) + \int_a^b e^{-s}f^2(s,y_0)\,ds\right]$$

<u>Συμπέρασμα</u>: η $y(t)$ είναι φραγμένη στο $[a,b]$ πράγμα το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη (ολικής) λύσης στο $[a,b]$

Γραμμική περίπτωση (προβλήματα δοκιμής)

Σε αυτή την περίπτωση το Π.Α.Τ. γράφεται:

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)\, y(t) + \mu(t), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Τότε $f(t,y) = \lambda(t)\, y(t) + \mu(t)$

Ισχύει το εξής:
Η f ικανοποιεί τη (12) (μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz) αν-ν η συνάρτηση $\lambda(t)$ λαμβάνει μη θετικές τιμές (δηλαδή $\lambda(t) \leq 0$, $t \in [a,b]$).

Παρατήρηση

Όταν μιλάμε για ευστάθεια αναφερόμαστε στη διαφορά δύο λύσεων.
Στην περίπτωση των γραμμικών ΣΔΕ, αρκεί να μελετήσουμε μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς ΣΔΕ διότι η διαφορά δύο λύσεων ικανοποιεί την αντίστοιχη ομογενή ΣΔΕ αφού:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\varepsilon^2(t)\right) = \varepsilon(t)\cdot\varepsilon'(t) = (y-z)(\lambda y + \mu - \lambda z - \mu)$$

$$= \lambda (y-z)^2.]$$

Συνεπώς, η $\mu(t)$ δεν παίζει κανένα ρόλο στην ευστάθεια του Π.Α.Τ.
Άρα αρκεί να μελετήσουμε το ΠΑΤ

$$(14)\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)\, y(t), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Τότε η σχέση (13) (εκτίμηση της ευστάθειας) γράφεται ως $\max\limits_{t\in[a,b]} |y(t)| \leq |y_0|$ υπό την προϋπόθεση η $\lambda(t)$ να λαμβάνει μη θετικές τιμές.

Άλλο πρόβλημα δοκιμής

Ένα ακόμα πρόβλημα δοκιμής είναι όταν $\lambda(t) = \lambda = \text{σταθερά}$

Τότε το Π.Α.Τ γράφεται:
$$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & t \in [0, b] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
και η (αναλυτική) λύση του είναι η $y(t) = e^{\lambda t}$.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Σ.Δ.Ε.

(Γενίκευση των προηγούμενων για συστήματα ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης)
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$
και έστω $y_0 = (y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0m})^T = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

Ζητείται συνάρτηση $y: [a,b] \to \mathbb{R}^m$, τέτοια ώστε
$$(17) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Παρατήρηση
Τα αποτελέσματα που αναφέραμε ισχύουν και για το (17) αν αντικαταστήσουμε την απόλυτη τιμή με μια οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$
π.χ. αν $y \in \mathbb{R}$ τότε $\|y\|_\infty = \max\limits_{t \in [a,b]} |y(t)|$

Για τη διανυσματική περίπτωση, δηλαδή αν $\bar{y}: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ ισχύει $\|\bar{y}\|_\infty = \max\limits_{t \in [a,b]} \{|y_1(t), \ldots, y_m(t)\}$

π.χ. (Ευκλείδεια νόρμα)
$$\|\bar{y}\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i(t)|^2 \right)^{1/2}$$

εσωτερικό γινόμενο: $(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i y_i$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^m$

Ισχύει: $\|x\| = (x, x)^{1/2}$.

Θεώρημα Ύπαρξης και μοναδικότητας για συστήματα ΣΔΕ.

Έστω $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνεχής και πληροί την ολική συνθήκη Lipschitz ως προς μια νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$, δηλαδή:

(18) $\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m : \|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq \|y_1 - y_2\|$.

Τότε $\forall y \in \mathbb{R}^m$ το πρόβλημα (17) λύνεται μονοσήμαντα. (XA)

Παρατήρηση

Η συνθήκη (18) είναι πολύ περιοριστική.

Πρόταση

Προβλήματα αρχικών τιμών ΣΔΕ ανώτερης τάξης μπορούν να γραφούν ως συστήματα α' τάξης.

Απόδειξη

Έστω ότι έχουμε το Π.Α.Τ:

(19) $$\begin{cases} y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)), & t \in [a,b] \\ y^{(i)}(a) = y_i & i = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

[Παρατήρηση

Η Σ.Δ.Ε είναι m τάξης άρα χρειαζόμαστε m το πλήθος αρχικές συνθήκες.]

Θέτουμε $z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$, $z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}$

Τότε το ΠΑΤ (19) γράφεται:

(20) $$\begin{cases} z'(t) = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ z_3(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \\ f(t, z_1(t), \dots, z_m(t)) \end{pmatrix}, & t \in [a,b] \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

Ειδική περίπτωση (ΣΔΕ β' τάξης)

το ΠΑΤ: $\begin{cases} y'' = f(t, y, y') , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 , \quad y'(a) = y_1 \end{cases}$

γράφεται ως ΣΔΕ β' τάξης.

θέτουμε $\begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = z(t)$ και $z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$ και

έχουμε: $\begin{cases} z'(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ f(t, y(t), z(t)) \end{pmatrix} \\ z(a) = z_0 \end{cases}$

Ευστάθεια για συστήματα Σ.Δ.Ε.

Έστω $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$

Λέμε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz ως προς y αν-ν:

(21) $\forall t \in [a,b] \ \forall x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^m : ((f(t,x) - f(t,\tilde{x})), (x - \tilde{x})) \leq 0$

όπου $(\cdot,\cdot)$ το εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^m$.

Τότε ισχύει ότι: $\| y(t) - z(t) \| \leq \| y_0 - z_0 \|$ όπου $\| \cdot \|$ η Ευκλείδεια νόρμα του $\mathbb{R}^m$.

Γραμμικό σύστημα ΣΔΕ (πρόβλημα δοκιμής)

(22) $\begin{cases} y'(t) = A(t) y(t) + g(t) , \quad t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Το (22) ικανοποιεί τη συνθήκη (21) αν-ν ο πίνακας $A(t)$ είναι μη θετικά ορισμένος, δηλαδή

(23) $\forall t \in [a,b] \ \forall x \in \mathbb{R}^m : (Ax, x) \leq 0$.

Άλλο πρόβλημα δοκιμής

Έστω ότι έχουμε τη ΣΔΕ $y' = \lambda y$ όπου $\lambda = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$

Τότε
$$y'(t) = \lambda \cdot y(t) \Leftrightarrow$$
$$(y_1 + y_2 i)' = (a + bi)(y_1 + y_2 i) \Leftrightarrow$$
$$y_1' + y_2' i = a y_1 - b y_2 + (b y_1 + a y_2) i \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Καταλήξαμε επομένως σε ένα γραμμικό σύστημα ΣΔΕ με $A(t) = A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Έστω τυχόν $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Τότε $(Ax, x) = a(x, x) = a\|x\|^2$

<u>Συμπέρασμα</u>: Η (21) ικανοποιείται αν-ν $a \leq 0$.
και τότε η y είναι φραγμένη

20/10/14

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Άσκηση 1.

Έστω $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Να δειχτεί ότι κάθε λύση της ομογενούς Σ.Δ.Ε $y'(t) = p(t) y(t)$ (1), $t \in [a,b]$ είναι της μορφής:

$$y(t) = c \cdot e^{\int_a^t p(s)\,ds}, \quad c \text{ σταθερά.}$$

Λύση

[1ο βήμα]

κάθε συνάρτηση της μορφής $y(t) = c e^{\int_a^t p(s)ds}$, $t \in [a,b]$

είναι λύση της (1) διότι: $y'(t)-p(t)\cdot y(t)=$

$$\left(c e^{\int_a^t p(s)ds}\right)' - p(t)\cdot c\cdot e^{\int_a^t p(s)ds} =$$

$$c\, e^{\int_a^t p(s)ds}\cdot\left(\int_a^t p(s)ds\right)' - p(t)\cdot c\, e^{\int_a^t p(s)ds} =$$

$$c\cdot e^{\int_a^t p(s)ds}\cdot p(t) - p(t)\cdot c\cdot e^{\int_a^t p(s)ds} = 0.$$

[2ο βήμα]

Πρέπει να δείξουμε ότι δεν υπάρχει λύση της (1) διαφορετικής μορφής από τη δοθείσα.

Έστω y λύση της (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $u(t)=y(t)\cdot e^{-\int_a^t p(s)ds}$, $t\in[a,b]$.

Έχουμε: $u'(t)=y'(t)e^{-\int_a^t p(s)ds} - y(t)e^{-\int_a^t p(s)ds}\cdot p(t)$

$= e^{-\int_a^t p(s)ds}\left[y'(t)-p(t)\cdot y(t)\right]=0$. Άρα $u(t)=c$, c σταθερά.

Άσκηση 2.

Θεωρούμε το Π.Α.Τ. (2): $\begin{cases} y'=y^2, & t\in[0,2] \\ y(0)=1 \end{cases}$

Ελέγξτε ότι το Θεώρημα τοπικής ύπαρξης και μοναδικότητας εξασφαλίζει ύπαρξη και μοναδικότητα σ' ένα διάστημα $[0,b']$ και επειδή η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς y σε ένα διάστημα της μορφής $[1-c,1+c]$, μελετήστε το b' ως συνάρτηση του c.

Λύση

$f(t,y)=y^2(t)$, $t\in[0,2]$.

Άρα $f_y(t,y) = 2y$
Παρατηρούμε ότι για $y \to \pm\infty$, ισχύει $|f_y| \to +\infty$ δηλαδή η f_y δεν είναι φραγμένη και επομένως η f δεν πληροί την ολική συνθήκη lipschitz. Συνεπώς, δεν πληροίται το Θεώρημα Ολικής Ύπαρξης και μοναδικότητας για το ΠΑΤ.

Ωστόσο, αφού η f_y είναι συνεχής ως προς y, ικανοποιεί την τοπική συνθήκη Lipschitz σε διάστημα της μορφής $[1-c, 1+c]$, $c>0$.
Άρα το ΠΑΤ (2) έχει μοναδική λύση η οποία ορίζεται σε διάστημα της μορφής $[0, b']$ όπου:

$$b' = \min\left(b, a + \frac{c}{A}\right) = \min\left(2, \frac{c}{A}\right)$$

με
$$A = \max_{\substack{a \le t \le b \\ y_0 - c \le y \le y_0 + c}} |f(t,y)| = \max_{\substack{0 \le t \le 2 \\ 1-c \le y \le 1+c}} |y^2(t)| = (1+c)^2$$

Επομένως, $b' = \min\left(2, \frac{c}{(1+c)^2}\right)$

Έστω ότι $2 < \frac{c}{(1+c)^2}$ (*) $\Rightarrow$

$$2 + 2c^2 + 4c < c \Leftrightarrow 2c^2 + 3c + 2 < 0$$
$$\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$$
άρα το τριώνυμο είναι παντού θετικό και η (*) δεν έχει λύση.

Άρα τελικά $b' = \frac{c}{(1+c)^2} = B(c)$

Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση $B(c)$.

Έχουμε $B'(c) = \frac{(1+c)^2 - 2c(1+c)}{(1+c)^4} = \frac{1-c}{(1+c)^3}$

	0		1		$+\infty$
B'		$+$		$-$	
B		$\nearrow$		$\searrow$	

Συνεπως, η μέγιστη τιμή του b είναι το $B(1) = \frac{1}{4}$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ (Ε.Δ)

Παρατήρηση

Το πρόβλημα επίλυσης μιας Δ.Ε. είναι ανάλογο με το πρόβλημα επίλυσης μιας Ε.Δ.
Η διαφορά μεταξύ μιας Δ.Ε και μιας Ε.Δ είναι ότι στις Ε.Δ. άγνωστες δεν είναι συναρτήσεις αλλά ακολουθίες σημείων.

Ορισμός

Εξίσωση Διαφορών (Difference Equation) ονομάζεται μία εξίσωση που περιέχει διαφορές και αποτελεί μία σχέση μεταξύ των τιμών y_i μιας συνάρτησης, οι οποίες είναι ορισμένες για διακριτές τιμές του ορίσματος x_i.

Δηλαδή $y = y(x)$, $x \in [a,b]$
Θεωρούμε τη διαμέριση $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, $N \in \mathbb{N}$ του διαστήματος $[a,b]$ με $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$.

N διαστήματα

Το βήμα της διαμέρισης είναι: $h = \frac{b-a}{N}$

Ορισμός

Λύση μιας Ε.Δ. είναι μια ακολουθία τιμών y_i που πληρούν την εξίσωση για ένα σύνολο διαδοχικών τιμών του i.

Ορισμός

Τάξη μιας Ε.Δ είναι η διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου δείκτη τιμών του i της εξίσωσης.

Παραδείγματα

(1) Θεωρούμε την Ε.Δ: $\boxed{y_{i+2} - y_{i+1} + y_i = 0}$

Πρόκειται για μια ομογενή Ε.Δ $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Η γενική λύση της θα έχει 2 αυθαίρετες σταθερές τις οποίες για να προσδιορίσουμε χρειαζόμαστε 2 συνθήκες.

(2) Θεωρούμε την Ε.Δ.: $\boxed{y_{i+1} - y_i = 1}$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Έστω ότι δίνεται: $y_0 = 0$.

Η Ε.Δ γράφεται: $y_{i+1} = y_i + 1$, $i \geq 0$

Άρα για $i=0$: $y_1 = 1$

για $i=1$: $y_2 = 2$

για $i=2$: $y_3 = 3$ ...

Η γενική λύση της Ε.Δ είναι: $y_i = i + c$, $i \geq 0$

c αυθαίρετη σταθερά

(3) Θεωρούμε την Ε.Δ.: $\boxed{y_{i+1} - (i+1)y_i = 0}$, $i \geq 0$.

Έστω ότι δίνεται: $y_0 = 1$.

Η Ε.Δ. γράφεται: $y_{i+1} = (i+1)y_i$, $i \geq 0$

Άρα για $i=0$: $y_1 = 1$

για $i=1$: $y_2 = 2$

για $i=2$: $y_3 = 6$ ...

Η γενική λύση της Ε.Δ είναι: $y_i = c \cdot i!$, $i \geq 0$

c αυθαίρετη σταθερά.

Ομογενείς γραμμικές Ε.Δ. n' τάξης με σταθ. συντελεστές.

Μορφή $y_{i+n} + a_{n-1} y_{i+n-1} + \dots + a_0 y_i = 0$

Τρόπος επίλυσης Ζητάμε λύση της μορφής $y_i = b^i \ \forall i$.
Αντικαθιστώντας στην Ε.Δ. έχουμε:
$b^i (b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0 \cdot b^0) = 0$.
Διαιρώντας με b^i παίρνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση:
$$\underbrace{b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_0}_{\text{πολυώνυμο n' βαθμού (χαρακτηριστικό)}} = 0$$

Παρατήρηση

Η γενική λύση της μη ομογενούς, γραμμικής Ε.Δ με σταθερούς συντελεστές:
$y_{i+n} + a_{i+n-1} y_{i+n-1} + \dots + a_0 y_i = b_i$
μπορεί να γραφεί στη μορφή $y_i = y_i^{r} + y_i^{M}$ όπου
y_i^{r} η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Ε.Δ,
y_i^{M} μια μερική λύση της μη ομογενούς Ε.Δ.

Παράδειγμα - Άσκηση

Δίνεται η Ε.Δ.: $2y_{i+3} - y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i = 0$ (*)
με αρχικές τιμές $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.
Να βρεθεί η λύση της (*) σε κλειστή μορφή για όλες τις διαδοχικές τιμές των i.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση της (*) είναι:
$2b^3 - b^2 - 2b + 1 = 0$ και έχει ρίζες:
$b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $b_3 = 1/2$
Άρα η γενική λύση της (*) είναι:
$y_i = C_1 \cdot 1 + C_2 (-1)^i + C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^i = C_1 + C_2(-1)^i + \frac{C_3}{2^i}$
Για $i=0$ η Ε.Δ. γράφεται:
$2y_3 - y_2 - 2y_1 + y_0 = 0 \Rightarrow y_3 = 2$

Για $i=2$ η Ε.Δ. γράφεται: $2y_4 - y_3 - 2y_2 + y_1 = 0 \Rightarrow y_4 = \frac{5}{2}$
Όμοια βρίσκουμε $y_5 = 9/4$ ...

Προσδιορισμός των σταθερών της γενικής λύσης
Για $i = 0, 1, 2$ έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + \frac{c_3}{2} = 1 \\ c_1 + c_2 + \frac{c_3}{4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 15/6 \\ c_2 = 1/6 \\ c_3 = -8/3. \end{cases}$$

Συμπέρασμα Η γενική λύση του ΠΑΤ είναι:

$$y_i = \frac{15}{6} - \frac{(-1)^i}{6} - \frac{8}{3 2^i}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9.

Μέθοδος Euler

Είναι η απλούστερη μέθοδος επίλυσης ενός Π.Α.Τ
Υποθέτουμε ότι το ακόλουθο ΠΑΤ λύνεται μονοσήμαντα.
(δηλαδή έχει ακριβώς μία λύση)

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)) & , t \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

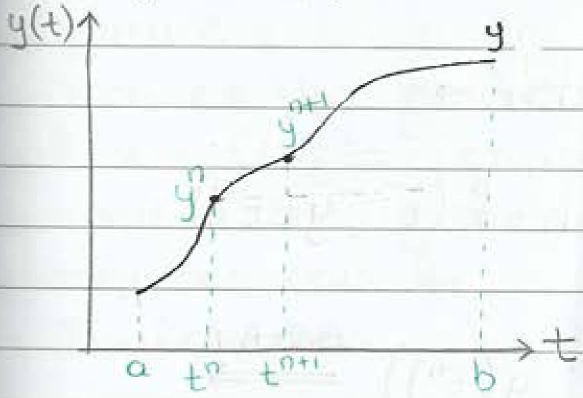
Θεωρούμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a, b]$
με $a = t^0 < t^1 < \ldots < t^{N-1} < t^N = b$

Θέτουμε $h = \frac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}$
Έτσι, ισχύει: $t^i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$

Οι προσεγγίσεις $y^1, \ldots, y^N$ που δίνει η μέθοδος Euler για ομοιόμορφο διαμερισμό με βήμα h προσδιορίζονται από τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο:

$$\boxed{\begin{array}{l} y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n) \\ n = 0, 1, \dots, N-1. \end{array}}$$ με δεδομένο ότι $y^0 = y_0$

Σχηματικά,



Παρατηρούμε ότι:
Όσο περισσότερα είναι τα σημεία του διαμερισμού (δηλαδή όσο πιο μικρό διάστημα θεωρήσουμε) τόσο πιο καλή προσέγγιση θα έχουμε.

1ος τρόπος κατασκευής της μεθόδου Euler. - Αριθμητική διαφόριση.

Για $t = t^n$ η Σ.Δ.Ε του Π.Α.Τ. γράφεται:

$$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n)).$$

Χρησιμοποιώντας εμπρόσθιες διαφορές, μπορούμε να γράφουμε:

$$y'(t^n) \simeq \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

Άρα έχουμε: $\dfrac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \simeq f(t^n, y(t^n))$

Αντικαθιστώντας όπου $y(t^i)$ το y^i η σχέση γράφεται:

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{h} \simeq f(t^n, y^n)$$

$$\Leftrightarrow \quad y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n).$$

2ος τρόπος κατασκευής της μεθόδου Euler - Αριθμητική Ολοκλήρωση.

Ολοκληρώνοντας τη ΣΔΕ: $y'(t) = f(t, y(t))$ έχουμε:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(s)\,ds = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s, y(s))\,ds$$

Ισχύει: $\displaystyle\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s, y(s))\,ds \simeq h \cdot f(t^n, y(t^n))$

Άρα $\displaystyle\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(s)\,ds \simeq h \cdot f(t^n, y(t^n)) \xRightarrow{\text{Θ.Θ.Α.Λ}}$

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) \simeq h \cdot f(t^n, y(t^n))$$

Αντικαθιστώντας όπου $y(t^i)$ το y^i έχουμε:

$$y^{n+1} \simeq y^n + h \cdot f(t^n, y^n).$$

3ος τρόπος κατασκευής της μεθόδου Euler - Ανάπτυγμα Taylor.

Το ανάπτυγμα Taylor της $y(t^{n+1})$ γύρω από το t^n είναι:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\,y'(t^n) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\,f(t^n, y(t^n))$$

Αντικαθιστώντας όπου $y(t^i)$ το y^i έχουμε:

$$y^{n+1} = y^n + h\,f(t^n, y^n)$$

Παρατήρηση

το "Ο" ονομάζεται "μεγάλο όμικρον του Landau" ή "ασυμπτωτικό σύμβολο άνω φράγματος".

Ορισμός

Όταν σε μια οριακή διαδικασία $x \to x_0$, η έκφραση $f(x) = O(g(x))$ σημαίνει ότι η f εκφράζεται ως γινόμενό της g επί μια φραγμένη συνάρτηση στην περιοχή του x_0.

Συμβολισμός $f(x) = O(g(x))$ όταν $x \to x_0$.

Θέματα που θα μας απασχολήσουν:

(1) Ευστάθεια της μεθόδου Euler

(2) Συνέπεια ή τοπικό σφάλμα της Euler $(O(h^2))$

(3) Ακρίβεια ή ολικό σφάλμα της Euler $(O(h))$

Συνέπεια ή τοπικό σφάλμα της μεθόδου Euler

Μπορούμε να γράψουμε:

$$y^{n+1} - y^n - h f(t^n, y^n) = \delta^n \quad \text{ή ισοδύναμα}$$

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) - h f(t^n, y(t^n)) = \delta^n$$

το δ^n λέγεται σφάλμα συνέπειας ή τοπικό σφάλμα.

$$\delta^n = \underbrace{y(t^{n+1})} - \underbrace{[\, y(t^n) + h f(t^n, y(t^n)) \,]}$$

y^{n+1}: ακριβής λύση $\quad$ $\tilde{y}^{n+1}$: προσεγγιστική λύση

$\tilde{y}^{n+1}$ είναι η τιμή που παίρνουμε μ' ένα βήμα της μεθόδου Euler, ξεκινώντας από την τιμή της $y(t^n)$ που είναι η y^n.

Υποθέτουμε ότι $y \in C^2([a,b])$.

Τότε, από το ανάπτυγμα Taylor έχουμε:

$$\delta^{n+1} = \left[y(t^n) + h\, y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi^n)\right] - \left[y(t^n) + h\, f(t^n, y(t^n))\right]$$

$$\Rightarrow \delta^{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(\xi^n) \quad \text{όπου } \xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$

Συμπέρασμα

Η μέθοδος Euler είναι συνεπής αν το δ^n πηγαίνει στο μηδέν, τουλάχιστον όπως το h^2 πηγαίνει στο μηδέν. Λέμε ότι: η μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας 2, τοπικά.

27/10/14

Επανάληψη στα προηγούμενα.

(2º κεφάλαιο - η μονοβηματική μέθοδος του Euler)

Θεωρούμε ότι το ΠΑΤ $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \ t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

έχει μοναδική λύση.

Έστω ακόμη $\{t^0, t^1, \dots, t^N\}$ ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}$.

Τότε $t^n = a + nh$, $n = 0, 1, \dots, N$ ($N+1$ σημεία, N υποδιαστήματα)

Οι προσεγγίσεις $y^1, y^2, \dots, y^N$ προσδιορίζονται από τον αναδρομικό τύπο:

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^n, y^n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

με αρχικά δεδομένα $y^0 = y_0$ (αρχική συνθήκη)

Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε το Π.Α.Τ:

$$\begin{cases} y'(t) = y \ , \ t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

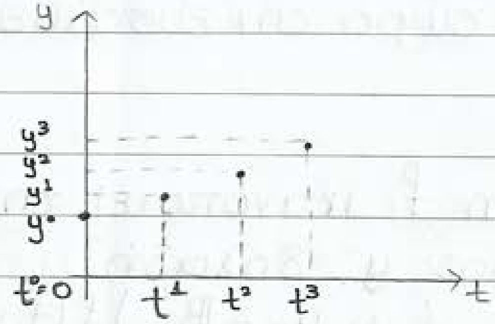
το οποίο έχει μοναδική λύση αφού: $f(t,y) = y \to f_y(t,y) = 1$, φραγμένη $\Rightarrow$ η f πληροί την ολική συνθήκη Lipschitz $\Rightarrow$ το ΠΑΤ έχει το πολύ μία λύση και επιπλέον η f είναι συνεχής $\Rightarrow$ $\exists$ μία τουλάχιστον λύση.

Θεωρούμε τον ομοιόμορφο διαμερισμό του $[0,1]$ που αποτελείται από $N=10$ υποδιαστήματα του $[0,1]$ και έχει βήμα $h = \frac{1-0}{10} = 0.1$.

Τότε $y^1 = y^0 + h y^0 = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1$

$y^2 = y^1 + h y^1 = 1.1 + 0.1 \cdot 1.1 = 1.21$ κτλ.

Σχηματικά,



Συνέπεια της μεθόδου Euler (τοπικό σφάλμα)

$\delta^n = y(t^n) - \tilde{y}^n$ όπου $y(t^n)$ η ακριβής λύση, $\tilde{y}^n$ η προσεγγιστική λύση.

Δείξαμε ότι $\delta^n = \frac{h^2}{2} f''(\xi^n)$, $\xi^n \in (t^{n-1}, t^n)$

Λέμε ότι η μέθοδος Euler είναι τάξης ακρίβειας τουλάχιστον 2 $(O(h^2))$.

(καινούρια ύλη)

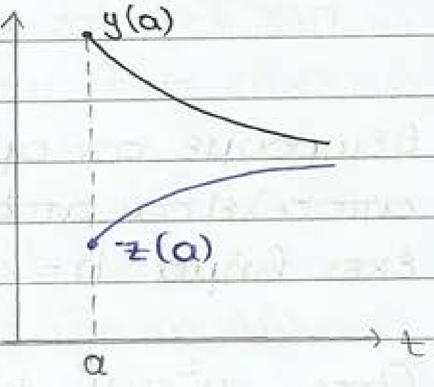
Η ευστάθεια της μεθόδου Euler.

Υπενθύμιση (τι σημαίνει ευστάθεια λύσης ενός ΠΑΤ).

Θεωρούμε το ΠΑΤ: (1) $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

καθώς και το ΠΑΤ: (2) $\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) & , t \in [a,b] \\ z(a) = z_0. \end{cases}$

Η λύση είναι ευσταθής όταν οι λύσεις των ΠΑΤ (1), (2) πλησιάζουν μεταξύ τους. π.χ. όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Θα μελετήσουμε τώρα την ευστάθεια της μεθόδου Euler.

Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί την ολική συνθήκη Lipschitz ως προς y, δηλαδή
$\exists L \geq 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} : |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \leq L |y_1(t) - y_2(t)|.$

Θεωρούμε τα ακόλουθα ΠΑΤ:

(1) $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) & , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 = y^0 \end{cases}$ και

(2) $\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h z(t^n, z^n) & , t \in [a,b] \\ z(a) = z_0 = z^0 \end{cases}$

όπου h το βήμα της διαμέρισης $\{t^0, t^1, \ldots, t^N\}$ του $[a,b]$. Δηλαδή $h = \frac{b-a}{N}$, $t^n = a + h \cdot n$, $n = 0, 1, \ldots N-1$

Ορίζουμε το σφάλμα $|\varepsilon^n| = |y^n - z^n|$
(διακριτοποίηση του σφάλματος - συνεχούς συνάρτησης $|\varepsilon| = |y - z|$ στο Π.Α.Τ)

Αφαιρώντας κατά μέλη τις Σ.Δ.Ε των ΠΑΤ (1), (2) έχουμε:

$$\varepsilon^{n+1} = y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h\left[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)\right]$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \overset{\text{τριγωνική ιδιότητα}}{\leq} |\varepsilon^n| + h\,|f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)|$$

$$\leq |\varepsilon^n| + h \cdot L\,|\varepsilon^n| = (1+hL)\,|\varepsilon^n|$$

Επαγωγικά, μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1+hL)^{n+1}\,|y^0 - z^0| \Rightarrow$$

$$|y^n - z^n| \leq (1+hL)^n\,|y^0 - z^0|$$

Παρατήρηση

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

Άρα $1 + x \leq e^x$ και επομένως

$$1 + hL \leq e^{hL}$$

Συμπέρασμα

$$|y^n - z^n| \leq e^{nhL}\,|y^0 - z^0|$$

Επειδή $h = \dfrac{b-a}{N}$ έχουμε ότι $nh \leq b-a$

Άρα $\forall n \in [0, N]$ έχουμε:

$$\max|y^n - z^n| \leq \underbrace{e^{L(b-a)}}_{C}\,|y_0 - z_0|.$$

[ευστάθεια της μεθόδου Euler με σταθερά $C = e^{L(b-a)}$ και βήμα h].

Παρατήρηση
Η σταθερά C είναι ανεξάρτητη από τη διαμέριση. Εξαρτάται μόνον από τη σταθερά Lipschitz L και από τα a,b.

Παρατήρηση
Με οπισθιες διαφορές η αναδρομική σχέση της μεθόδου είναι: $y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})$
Λέγεται έμμεση ή μη εκπεφρασμένη (inplicit)
Δεν προγραμματίζεται σειριακά. Πρέπει να λύσουμε (πχ. με μέθοδο Gauss) το σύστημα $Ax=b$ όπου A διαγώνιος πίνακας

Η ακρίβεια της μεθόδου Euler

Θεώρημα
- Εκτίμηση σφάλματος Euler - ολικό σφάλμα

Έστω $f \in C([a,b]\times \mathbb{R})$ η οποία πληροί την ολική συνθήκη Lipschitz και έστω $y \in C^2([a,b])$ η λύση του Π.Α.Τ: $\begin{cases} y' = f(t, y(t)), \ t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Αν οι $y^0, y^1, \dots, y^N$ είναι οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος Euler για ομοιόμορφο διαμερισμό με βήμα $h = (b-a)/N$, $N \in \mathbb{N}$ τότε:
$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right) h$$
όπου $M = \max_{a\le t\le b} \|y''(t)\|$ και L η σταθερά Lipschitz.

Λήμμα
Έστω δ θετικός αριθμός και $K, d_0, d_1, \dots$ μη αρνητικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $d_{i+1} \le (1+\delta) d_i + K$, $i=0,1,\dots$ (1)
Τότε ισχύει: $d_n \le d_0 \cdot e^{n\delta} + K \cdot \dfrac{e^{n\delta} - 1}{\delta}$, $n=0,1,\dots$ (2)

Απόδειξη του λήμματος. (με επαγωγή)

Για $n=0$ η (2) γράφεται: $d_0 \le d_0$. ισχύει.

Για $n \ge 1$, λόγω της (1) έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} d_n &\le (1+\delta) d_{n-1} + K \\ d_{n-1} &\le (1+\delta) d_{n-2} + K \end{aligned}\right\} \Rightarrow d_n \le (1+\delta)^2 d_{n-2} + K\left[(1+\delta)+1\right]$$

Άρα $d_n \le (1+\delta)^n d_0 + K\left[1+(1+\delta)+\dots+(1+\delta)^{n-1}\right]$

Ισχύει: $(1+\delta)^n - 1 = \delta\left[(1+\delta)^{n-1} + \dots + (1+\delta)+1\right]$.

Επομένως, $d_n \le (1+\delta)^n d_0 + K \cdot \dfrac{(1+\delta)^n - 1}{\delta} \le$

$$e^{n\delta} d_0 + K \frac{e^{n\delta}-1}{\delta} \qquad n=0,1,\dots$$

Απόδειξη του Θεωρήματος

Το Θεώρημα Taylor μέχρι $2^{ης}$ τάξης για την y στο t^{n+1} γύρω από το t^n δίνει:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} {}''(\xi^n), \quad \xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$

Επομένως λόγω του Π.Α.Τ. θα έχουμε:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h f(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi^n) \quad (3)$$

Ο αναδρομικός τύπος της μεθόδου Euler είναι:

$$y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) \quad (4)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (3), (4) έχουμε:

$$\varepsilon^{n+1} = y(t^{n+1}) - y^{n+1} = y(t^n) - y^n + h\left[f(t^n, y(t^n)) - f(t^n, y^n)\right]$$
$$+ \frac{h^2}{2} y''(\xi^n), \quad \xi_n \in (t^n, t^{n+1})$$

Λόγω της συνθήκης Lipschitz θα έχουμε:

$$\varepsilon^{n+1} \leq \varepsilon^{n} + h \cdot L\, \varepsilon^{n} + \frac{h^2}{2} y''(\xi^n), \quad \xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$

Από την τριγωνική ιδιότητα θα έχουμε:

$$|\varepsilon^{n+1}| \leq (1+hL)|\varepsilon^n| + |\delta^n|, \quad n=0,1,\dots,N-1$$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \leq (1+hL)|\varepsilon^n| + \max_{i=0,\dots,N-1} |\delta^i| \quad \text{όπου}$$

$\max_{i=0,\dots,N-1} |\delta^i|$ είναι το μέγιστο τοπικό σφάλμα της μεθόδου Euler.

Λόγω του προηγούμενου λήμματος (αν θεωρήσουμε $d_n = |\varepsilon^n|$, $\delta = hL$, $K = \max_{i=0,\dots,N-1} |\delta^i|$)

έχουμε: $|\varepsilon^n| \leq |\varepsilon^0| e^{nhL} + \max_{i=0,\dots,N-1} |\delta^i| \cdot \dfrac{e^{nhL}-1}{hL}$,

$n = 0, 1, \dots, N$.

Είναι: $|\varepsilon^0| = |y(t^0) - y^0| = |y_0 - y^0| = 0$
λόγω της αρχικής συνθήκης του ΠΑΤ.

Επομένως, $|\varepsilon^n| \overset{nh=b-a}{\leq} \max_{i=0,\dots,N-1} |\delta^i| \cdot \dfrac{e^{L(b-a)}-1}{L \cdot h}$

Θέτουμε $M = \max_{a \leq t \leq b} |y''(t)|$. Τότε

$$\max_{i=0,\dots,N-1} |\delta^i| = \frac{h^2}{2} M$$

Άρα $|\varepsilon^n| \leq \dfrac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right) h$

Συνεπώς, $\max\limits_{a\le t\le b} |y(t^n)-y^n| \le Ch$ όπου

$$C=\left(e^{L(b-a)}-1\right)\cdot\frac{M}{2L}.$$

Παρατήρηση 1.

Το ολικό σφάλμα της μεθόδου Euler εξαρτάται από τα δεδομένα του προβλήματος (a, b, y_0, f).

Παρατήρηση 2.

Το φράγμα του ολικού σφάλματος είναι γινόμενο μιας σταθεράς C και του h (στην πρώτη δύναμη)

Η μέθοδος Euler έχει τάξη ακρίβειας τουλάχιστον 1

Αποδεικνύεται ότι έχει ακριβώς 1, δηλαδή:

Δεν είναι δυνατό να βελτιώσουμε (να ελαττώσουμε) τη δύναμη του h στο φράγμα του ολικού σφάλματος.

Παράδειγμα.

Έστω ότι δίνεται το ΠΑΤ: $(*)\begin{cases} y' = 2t & , 0\le t\le 1 \\ y(0)=0 \end{cases}$

Ολοκληρώνοντας τη ΣΔΕ του $(*)$ έχουμε:

$$\int_0^y \frac{dy}{dt}\,dt = 2\int_0^t s\,ds \Rightarrow y(t)=t^2 \quad , 0\le t\le 1$$

Δηλαδή η ακριβής λύση του ΠΑΤ είναι:

$y(t)=t^2, \quad 0\le t\le 1.$

Παρατηρούμε ότι $y''(t)=2$, σταθερή συνάρτηση (δεν εξαρτάται από το $\xi^n\in(0,1)$).

Θεωρούμε τον ομοιόμορφο διαμερισμό $\{t^0, t^1, \dots, t^N\}$, $N\in\mathbb{N}$ με βήμα $h=\frac{1}{n}$, $t^n = 0 + h\cdot n = nh$.

και $y^0, y^1, \dots, y^N$ οι προσεγγίσεις της μεθόδου Euler γι' αυτό το Π.Α.Τ.

Τότε, η αναδρομική σχέση της μεθόδου Euler είναι:

$$y^{n+1} = y^n + 2ht^n \Longrightarrow y^{n+1} = y^n + 2nh^2, \quad n=0,\dots,N-1$$

Άρα $y^n = y^{n-1} + 2(n-1)\cdot h^2 \quad n=0,1,\dots,N-1$.

Επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$y^n = y^0 + 2h^2\left[(n-1)+(n-2)+\dots+1\right] \Longrightarrow$$

$$y^n = y_0 + 2h^2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \Longrightarrow$$

$$y^n = n(n-1)\cdot h^2, \quad n=0,1,\dots,N.$$

Για $n=N$: $y^N = N(N-1)\cdot h^2 = N^2h^2 - Nh^2 \xRightarrow{h=\frac{1}{N}}$

$$y^N = 1 - h$$

Συνεπώς, το ολικό σφάλμα στο $t^N = 1$ είναι:

$$|\varepsilon^N| = |y(t^N) - y^N| = |1-(1-h)| = h.$$

Παρατήρηση

Η τάξη ακρίβειας της μεθόδου Euler για το Π.Α.Τ (*) είναι 1.

03/11/14

Επανάληψη στα προηγούμενα.

Υποθέτουμε ότι το ακόλουθο ΠΑΤ λύνεται μονοσήμαντα:

$$(5)\begin{cases} y' = f(t,y), & t\in[a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Άμεση (explicit) μέθοδος Euler:

$$y^{n+1} = y^n + h\cdot f(t^n, y^n), \quad n=0,1,\dots,N-1$$

όπου $h = \dfrac{b-a}{N}$ το βήμα της διαμέρισης του $[a,b]$ σε N διαστήματα.

Συνέπεια ή τοπικό σφάλμα: $O(h^2)$. Ειδικότερα,

$$\delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi^n), \quad \xi^n \in (t^{n-1}, t^n)$$

Ευστάθεια: $|\varepsilon^n| = |y^n - z^n| \le \underbrace{e^{L(b-a)}}_{C} |y^0 - z^0|$

Παρατήρηση Η ευστάθεια δεν εξαρτάται από τη διαμέριση που επιλέγουμε (ούτε από το βήμα της, h)

Ακρίβεια ή ολικό σφάλμα: $O(h)$. Ειδικότερα,

$$\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right]\cdot h$$

όπου $M = \max_{a\le t\le b} |y''(t)|$

(καινούρια ύλη)

Γενίκευση της μεθόδου Euler για Π.Α.Τ συστημάτων ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης.

Παράδειγμα (ΣΔΕ $2^{ης}$ τάξης).

Έστω ότι δίνεται το Π.Α.Τ.:

$$(6)\ \begin{cases} y'' = ay, & t\in[0,+\infty) \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

Θέτουμε $y' = g$. Τότε το Π.Α.Τ. γράφεται:

$$\begin{cases} y' = g \\ g' = ay \\ y(0) = y_0 \\ g(0) = y_1 \end{cases}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Γενική περίπτωση

Έστω ότι δίνεται το σύστημα Σ.Δ.Ε $1^{ης}$ τάξης

$$(7) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) , \quad t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

με $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $y_0 \in \mathbb{R}^m$

$y = (y_1, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^m$

Συνέπεια της μεθόδου Euler για συστήματα ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης.

Υπενθύμιση (για το ΠΑΤ (5))

Το ανάπτυγμα Taylor της $y(t^{n+1})$ γύρω από το t^n είναι:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \cdot y'(t^n) + \underbrace{\frac{h^2}{2} y''(\xi^n)}_{= \delta^n}, \quad \xi^n \in (t^n, t^{n+1})$$

Για $\bar{y} : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ έχουμε:

$$y_i(t^{n+1}) = y_i(t^n) + h \cdot y_i'(t^n) + \frac{h^2}{2} y_i''(\xi_i^n)$$

$$\xi_i^n \in (t^n, t^{n+1}), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Επομένως,

$$\bar{y}(t^{n+1}) = \bar{y}(t^n) + h\bar{y}'(t^n) + \underbrace{\frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} y_1''(\xi_1^n) \\ y_2''(\xi_2^n) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_m^n) \end{pmatrix}}_{\delta^n}$$

Συμπέρασμα Η συνέπεια της μεθόδου Euler για το σύστημα ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης είναι

$$\delta^n = \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} y_1''(\xi_1^n) \\ y_2''(\xi_2^n) \\ \vdots \\ y_m''(\xi_m^n) \end{pmatrix}$$

$1^{η}$ περίπτωση: $\|\cdot\|_\infty$ (νόρμα σταθερή απείρου)

Υπενθύμιση
Αν $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T$, τότε $\|\bar{x}\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} |x_i|$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}\|\delta^n\|_\infty &= \frac{h^2}{2}\max_{1\le i\le m} |y_i''(\xi_i^n)| \\ &\le \frac{h^2}{2}\max_{1\le i\le m}\left(\max_{a\le t\le b}|y_i''(t)|\right) \\ &= \frac{h^2}{2}\max_{a\le t\le b}\left(\max_{1\le i\le m}|y_i''(t)|\right) \\ &= \frac{h^2}{2}\max_{a\le t\le b}\|y''(t)\|_\infty = \frac{h^2}{2}\cdot M.\end{aligned}$$

Συμπέρασμα

$$\|\delta^n\|_\infty \le \frac{h^2}{2}\cdot M, \quad M = \max_{a\le t\le b}\|y''(t)\|_\infty$$

2^{η} περίπτωση: $\|\cdot\|$ (τυχαία νόρμα στον $\mathbb{R}^m$)

Γνωρίζουμε ότι: $\exists\, C_1 > 0,\ \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^m : \|x\| \leq C_1 \|x\|_\infty$

Επομένως, $\|\delta^n\| \leq C_1 \|\delta^n\|_\infty \leq C_1 \cdot \frac{h^2}{2} M$ όπου

$$M = \max_{a \leq t \leq b} \|y''(t)\|_\infty$$

Ακρίβεια - Ολικό σφάλμα της μεθόδου Euler για συστήματα ΣΔΕ $1^{\eta\varsigma}$ τάξης

Θεώρημα

Έστω $f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ συνάρτηση που πληροί την ολική συνθήκη lipschitz και έστω $\bar{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$ με $y_i \in C^2([a,b])$ $i = 1, \dots, m$ η λύση του Π.Α.Τ (7).

Αν $\bar{y}^0, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^N$ είναι οι προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος Euler ως προς ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{N}$, τότε ισχύει:

$$\max_{0 \leq n \leq N} \|\bar{y}(t^n) - \bar{y}^n\| \leq \frac{M}{2L}\left[e^{L(b-a)} - 1\right] \cdot C_1$$

όπου $M = \max_{a \leq t \leq b} \|y''(t)\|$. επειδή έχουμε τυχαία νόρμα.

Σφάλμα στρογγύλευσης.

Επειδή η τάξη ακρίβειας της μεθόδου Euler είναι μόνο 1, για να πάρουμε καλές προσεγγίσεις, πρέπει να θεωρήσουμε πολύ μικρό h, δηλαδή να κάνουμε πολλά βήματα. Επειδή όμως οι πράξεις γίνονται με υπολογισμούς πεπερασμένης ακρίβειας, τα σφάλματα στρογγύλευσης μπορούν να συσσωρευθούν και να αλλοιώσουν το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα

Θεωρούμε το γραμμικό ΠΑΤ (9) $\begin{cases} y' = \lambda y, & t \in [0,\infty), \lambda < 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Η αναλυτική λύση του (9) είναι: $y(t) = e^{\lambda t}, t \geq 0$ και φθίνει εκθετικά με το χρόνο $(t \to \infty)$.

Το αντίστοιχο διακριτό πρόβλημα είναι:

(10) $\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\lambda y^n, & n \geq 0 \\ y^0 = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^{n+1} = (1+\lambda h) y^n \\ y^0 = 1 \end{cases}$

Με επαγωγή, καταλήγουμε στο εξής:

$$y^n = (1+\lambda h)^n y^0 = (1+\lambda h)^n, \quad n \geq 0$$

Θεωρώντας $t = nh$ έχουμε: $y^n = \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lambda t}$

Στην πράξη, οι υπολογισμοί γίνονται με κάποιο μικρό θετικό h
Για $n \geq 0$, $|y^n| = |1+\lambda h|^n$. Για $n \to \infty$,

Όταν $|1+\lambda h| < 1$, $|y^n| \to 0$
Όταν $|1+\lambda h| = 1$, $|y^n| = 1$
Όταν $|1+\lambda h| > 1$, $|y^n| \to \infty$

Συνεπώς, η μέθοδος Euler συγκλίνει, δηλαδή δίνει προσεγγίσεις που μιμούνται την αναλυτική λύση, μόνο όταν $|1+\lambda h| < 1$, δηλαδή όταν $\lambda h \in (-2, 0)$

Επίσης, οι προσεγγίσεις ικανοποιούν τη συνθήκη $|y^n| \leq 1, n \in \mathbb{N}$ ακριβώς όταν $|1+\lambda h| \leq 1$ και τότε $\lambda h \in [-2, 0]$.

Παρατήρηση

Μια μέθοδος για την αριθμητική επίλυση του ΠΑΤ

$$\begin{cases} y' = f(t,y) , & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

στο Π.Α.Τ (9)

είναι απόλυτα ευσταθής, αν όταν εφαρμοστεί, δίνει φραγμένες προσεγγίσεις y^n όταν $n \to \infty$.
Το διάστημα $I = [b, 0]$, $-\infty < b < 0$ που συμβαίνει αυτό, λέγεται διάστημα απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου.

Συμπέρασμα

Στο προηγούμενο παράδειγμα, η μέθοδος Euler είναι απόλυτα ευσταθής για $0 < h \le -\frac{2}{\lambda}$ $(\lambda < 0)$ και το διάστημα απόλυτης ευστάθειας είναι το $I = [-2, 0]$

Παρατήρηση

Αν το $|\lambda|$ είναι μεγάλο, η συνθήκη αποτελεί σοβαρό περιορισμό για το βήμα h της μεθόδου.

Απόλυτη ευστάθεια (γενική περίπτωση)

Μια αριθμητική μέθοδος για το Π.Α.Τ:

$$(1) \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) , & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

λέγεται απόλυτα ευσταθής για $h > 0$ αν όταν εφαρμοστεί στο πρόβλημα δοκιμής

$$(2) \begin{cases} y'(t) = \lambda y(t) , & t \in [0, \infty) , \ \lambda \in \mathbb{C} \\ y(0) = 1 & Re(\lambda) \le 0 \end{cases}$$

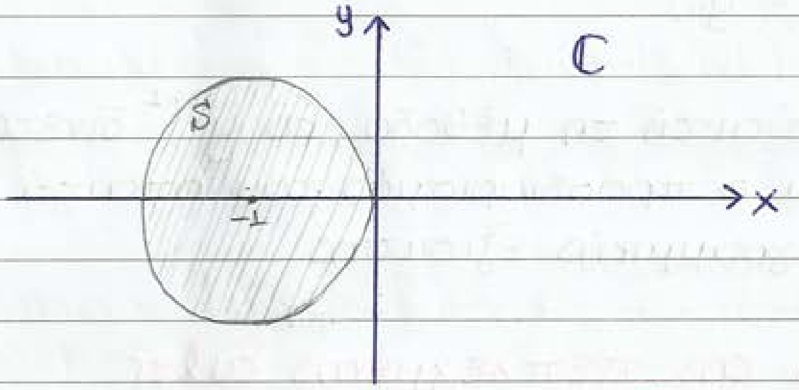
δίνει προσεγγίσεις $(y^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ που παραμένουν φραγμένες καθώς $n \to \infty$

Η περιοχή S του μιγαδικού επιπέδου στην οποία η μέθοδος είναι απόλυτα ευσταθής, λέγεται περιοχή απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου.

Στην περίπτωση μονοβηματικών μεθόδων (οι υπολογισμοί γίνονται σε ένα βήμα) όπως η Euler, οι προσεγγίσεις $(y^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ παραμένουν φραγμένες για το πρόβλημα (2) για ένα συγκεκριμένο λh αν-ν $|y^{n+1}| \leq |y^n|$ (δηλαδή η $|y^n|$ είναι φθίνουσα)

Συμπέρασμα

Το αντίστοιχο διακριτό πρόβλημα του (2) είναι:
$y^n = (1+h\lambda)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.
Παρατηρούμε ότι καθώς $n\to\infty$, οι προσεγγίσεις παραμένουν φραγμένες όταν $|1+\lambda h|\leq 1$.
Άρα η περιοχή απόλυτης ευστάθειας της Euler στο μιγαδικό επίπεδο είναι: $S=\{z\in\mathbb{C} : |1+z|\leq 1\}$
κυκλικός δίσκος κέντρου $(-1,0)$, ακτίνας 1.



Πλεονεκτήματα της άμεσης μεθόδου Euler

1. Είναι άμεση μέθοδος (όλες οι τιμές υπολογίζονται σειριακά)
2. είναι εύκολο να προγραμματιστεί.
3. απαιτεί μόνο έναν υπολογισμό της f ανά βήμα.

Μειονεκτήματα της άμεσης μεθόδου Euler.

1. Έχει πολύ χαμηλή τάξη ακρίβειας (ένα), πολύ μικρό βήμα h.
2. Υψηλό συνολικό υπολογιστικό κόστος
υψηλά σφάλματα στρογγύλευσης
3. πολύ μικρή περιοχή ευστάθειας.

ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΗ ΜΕΘΟΔΟΣ EULER (implicit Euler)

Προσεγγίζουμε την παράγωγο με το πηλίκο:

$$\frac{y(t^n)-y(t^{n-1})}{h}$$ (οπίσθιες πεπερασμένες διαφορές)

στο Π.Α.Τ. $\begin{cases} y' = f(t,y), \ t\in[a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

και καταλήγουμε στην αναδρομική σχέση:

$$\boxed{y^{n+1} = y^n + h\cdot f(t^{n+1}, y^{n+1})}, \ n=0,1,\dots,N-1$$

με $y^0 = y_0$.

Λέμε ότι σ' αυτή τη μέθοδο, το y^{n+1} δίνεται πεπλεγμένα και ο προσδιορισμός του απαιτεί την επίλυση μιας μη γραμμικής εξίσωσης.

Συνέπεια της πεπλεγμένης Euler

$$\delta^n = \frac{h^2}{2}y''(\xi^n), \quad \xi^n\in(t^{n-1}, t^n)$$ (όμοια με της Euler)

Ευστάθεια της πεπλεγμένης Euler

$$\max_{0\le n\le N} |y^n - z^n| \le e^{2L(b-a)}|y_0 - z_0|$$

Απόδειξη.
Θεωρούμε τα δύο διακριτά ΠΑΤ:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}) \\ y^0 = y_0 \end{cases} \quad \begin{matrix} n=0,1,\dots,N-1 \\ N\in\mathbb{N}^* \end{matrix}$$

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h\cdot f(t^{n+1}, z^{n+1}) & , n=0,1,\dots,N-1 \\ z^0 = z_0 & N \in \mathbb{N}^* . \end{cases}$$

Άρα $\varepsilon^{n+1} = y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h\left[f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})\right]$

$$\Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \overset{\text{τριγωνική ιδιότητα}}{\leq} |y^n - z^n| + h\,|f(t^{n+1}, y^{n+1}) - f(t^{n+1}, z^{n+1})|$$

$$\overset{\text{συνθήκη Lipschitz}}{\leq} |y^n - z^n| + h\cdot L\,|y^{n+1} - z^{n+1}|$$

Άρα $|1 - Lh|\cdot|\varepsilon^{n+1}| \leq |\varepsilon^n| \Rightarrow |\varepsilon^{n+1}| \leq \frac{1}{|1-Lh|}|\varepsilon^n|$

Για $hL \leq \frac{1}{2}$ ισχύει ότι $\frac{1}{1-hL} \leq 1 + 2hL$

Άρα $|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq (1 + 2hL)\,|y^n - z^n|$

Επαγωγικά έχουμε: $|y^n - z^n| \leq (1+2hL)^n\,|y_0 - z_0|$

$\leq e^{(2hL)n}\,|y_0 - z_0|$.

Επομένως $\max\limits_{\substack{0\leq n\leq N \\ N\in\mathbb{N}}} |y^n - z^n| \leq e^{2L(b-a)}\cdot|y_0 - z_0|$

Περιοχή απόλυτης ευστάθειας της πεπλεγμένης Euler.

Έστω το ΠΑΤ: $\begin{cases} y' = \lambda y & , t\in[0,\infty), \lambda\in\mathbb{C}. \\ y(0) = 1 & \mathrm{Re}(\lambda) \leq 0. \end{cases}$

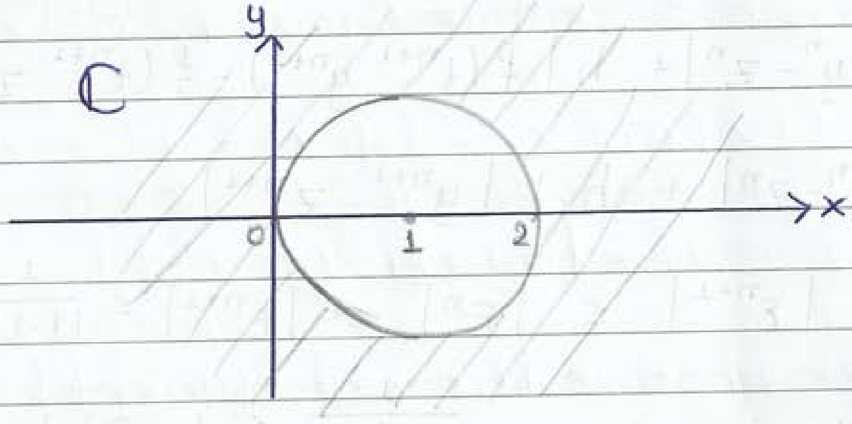
Το αντίστοιχο διακριτό Π.Α.Τ είναι:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h\cdot\lambda\cdot y^{n+1} \longrightarrow y^{n+1} = \frac{1}{1-\lambda h}\cdot y^n \\ y^0 = 1 \end{cases}$$

Επαγωγικά έχουμε: $y^n = \frac{1}{(1-\lambda h)^n}\,y_0 = \frac{1}{(1-\lambda h)^n}, n\in\mathbb{N}^*$.

Για να συγκλίνει η μέθοδος πρέπει $|1-\lambda h| \geq 1$.

Άρα η περιοχή απόλυτης ευστάθειας S στο μιγαδικό επίπεδο είναι: $S = \{ z \in \mathbb{C} : |1-z| \geq 1 \}$, δηλαδή το εξωτερικό του ανοιχτού δίσκου $|1-z| < 1$ με κέντρο 1 και ακτίνα 1.



Ακρίβεια της πεπλεγμένης Euler

Αν η f ικανοποιεί την ολική συνθήκη Lipschitz, τότε για $L \cdot h \leq \frac{1}{2}$ αποδεικνύεται ότι:

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \frac{M}{2L} \left[e^{2L(b-a)} - 1 \right] h$$

όπου $M = \max_{a \leq t \leq b} |y''(t)|$

Συμπέρασμα

Και η πεπλεγμένη Euler έχει τάξη ακρίβειας 1.

07/11/14

Επανάληψη στα προηγούμενα

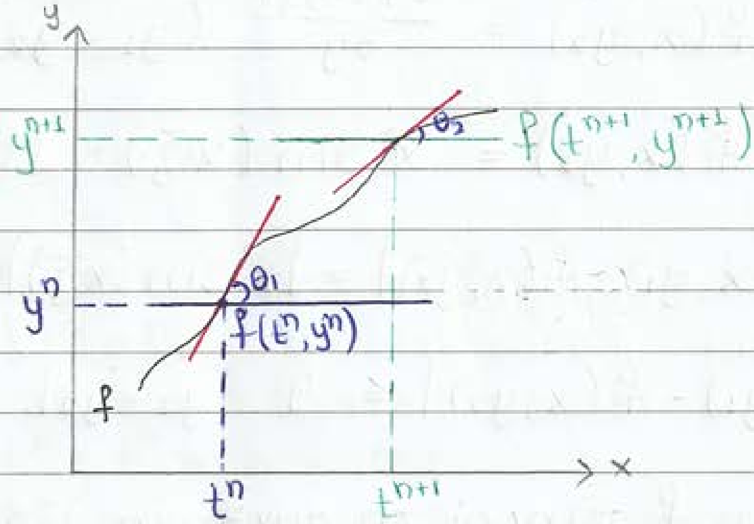
Θεωρούμε το Π.Α.Τ.: $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$, $t \in [a,b]$

Άμεση μέθοδος Euler

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^n, y^n) + \underbrace{O(h^2)}_{\text{συνέπεια}} \;/\; \underbrace{O(h)}_{\text{ακρίβεια}}$$

Πεπλεγμένη μέθοδος Euler.

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^{n+1}, y^{n+1}) + \underbrace{O(h^2)}_{\text{συνέπεια}} \;/\; \underbrace{O(h)}_{\text{ακρίβεια}}$$



(καινούρια ύλη)

Η πεπλεγμένη μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]$$

Παρατήρηση

Η προσέγγιση της λύσης με αυτή τη μέθοδο απαιτεί περισσότερους υπολογισμούς σε σχέση με την άμεση και την πεπλεγμένη μέθοδο Euler που έχουμε δει.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Άσκηση 1.

Θεωρούμε το ΠΑΤ (1): $\begin{cases} y' = 1 - x\cos(xy), & x \in [0,2] \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Νδο η $f(x,y) = 1 - x\cos(xy)$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz, ως προς τη μεταβλητή y και να εκτιμήσετε τη σταθερά L. Έχει το πρόβλημα (1) μοναδική λύση;

Λύση

Από το Θ.Μ.Τ έχουμε ότι:

$\forall y_1, y_2$ με $y_1 < y_2$ $\exists \xi \in (y_1, y_2)$:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial y} (y_1 - y_2) \Leftrightarrow$$

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = x^2 \sin(x\xi) \cdot (y_1 - y_2)$$

Άρα $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x^2 \sin(x\xi)| \cdot |y_1 - y_2|$

$$\Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 4 \; |y_1 - y_2|$$

Επομένως η f πληροί τη συνθήκη lipschitz ως προς y και η σταθερά lipschitz είναι $L=4$.

Επειδή η $f(x,y)$ είναι συνεχής για $x \in [0,2]$, $y \in (-\infty, +\infty)$ από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας (Piccard) έχουμε ότι το (1) έχει μοναδική λύση

Άσκηση 2.

Να προσεγγιστεί η λύση του Π.Α.Τ:

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \;, t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

με την (άμεση) μέθοδο Euler και με το ανάπτυγμα Taylor 2ης τάξης για μια ομοιόμορφη διαμέριση του διαστήματος [0,1] με βήμα $h = 0,1$.

Τι παρατηρείτε;

Να υπολογιστεί το δ^n για κάθε βήμα που πραγματοποιείται.

Λύση

παρατήρηση
Η Euler έχει τοπικό σφάλμα $O(h^2)$.
Το ανάπτυγμα Taylor έχει τοπικό σφάλμα $O(h^3)$
Άρα το ανάπτυγμα Taylor δίνει καλύτερη προσέγγιση της λύσης του Π.Α.Τ.

$h = \frac{1-0}{N} \Rightarrow N = \frac{1}{0.1} = 10.$

Έχουμε: $t^0 = 0$, $t^N = t^{10} = 1$, $y^0 = 1$,
$(y^n)' = f(t^n, y^n) = y^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Ακόμη, $t^1 = t^0 + h = 0.1$
$t^2 = t^0 + 2h = 0.2$
$t^3 = t^0 + 3h = 0.3$ κτλ.

Μέθοδος Euler: $y^{n+1} = y^n + hy^n + \underbrace{O(h^2)}_{\text{συνέπεια}}$

Για $n=0$: $y^1 = y^0 + hy^0 = 1.1$
για $n=1$: $y^2 = y^1 + hy^1 = 1.21$
για $n=2$: $y^3 = y^2 + hy^2 = 1.331$
συνεχίζω με τον ίδιο τρόπο μέχρι και το y^{11}

Ανάπτυγμα Taylor 2ης τάξης.

$$y^{n+1} = y^n + h \cdot y^{n'} + \frac{h^2}{2} \cdot y^{n''} + O(h^3) \Longrightarrow$$

$$y^{n+1} = y^n + hy^n + \frac{h^2}{2} y^n \quad \text{αφού } y^{n'} = y^n$$
$$y^{n''} = y^{n'} = y^n$$

για $n = 0, 1, 2 \dots$ με την προϋπόθεση ότι $y \in C^2([0,1])$

$$\Rightarrow y^{n+1} = y^n \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)$$

Για $n=0$: $y^1 = y^0 \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) = 1.1050$
παρατήρηση: πιο κοντά στην $y(t^1)$ (αναλυτική λύση) από την y^1 της Euler.

Για $n=1$: $y^2 = y^1\left(1+h+\frac{h^2}{2}\right) = 1.2210$

για $n=2$: $y^3 = y^2\left(1+h+\frac{h^2}{2}\right) = 1.3492$

Αναλυτική λύση: $y(t^n) = e^{t^n}$ $n=0,1,2,\ldots$

n	t^n	αναλυτική $y(t^n)$	Euler y^n	Taylor y^n	Euler δ^n	Taylor δ^n
0	0	1	1	1	0	0
1	0.1	1.1052	1.1000	1.1050	0.0052	0.0002
2	0.2	1.2214	1.2100	1.2210	0.0114	0.0004
3	0.3	1.3438	1.3310	1.3492	0.0188	0.0006

Παρατήρηση

Η μέθοδος Euler δίνει χειρότερες προσεγγίσεις από το ανάπτυγμα Taylor $2^{ης}$ τάξης λόγω της διαφοράς ακρίβειας των μεθόδων.

Άσκηση 3.

Θεωρούμε το Π.Α.Τ με αγνώστους $x(t), y(t)$ $(t\geq 0)$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = x(t) \\ x(0)=1, \ y(0)=0 \end{cases}, t\geq 0$$

(α) Νδο ισχύει $x^2(t) + y^2(t) = 1$, $t\geq 0$ (νόμος διατήρησης)

(β) Θεωρήστε τις προσεγγίσεις (x^n, y^n), $n\geq 0$ που παράγει η μέθοδος Euler για το παραπάνω σύστημα ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης για σταθερό $h>0$.
Νδο $(x^n)^2 + (y^n)^2 \to +\infty$ όταν $n\to+\infty$
(δηλαδή ο νόμος διατήρησης που ισχύει για την αναλυτική λύση, δεν ισχύει στη μέθοδο Euler)

(γ) Θεωρήστε τις προσεγγίσεις (x^n, y^n), $n\geq 0$ που παράγει η μέθοδος τραπεζίου $(h>0)$. Νδο $(x^n)^2+(y^n)^2=1$ $\forall n$.

παρατήρηση: όταν στην αναλυτική λύση υπάρχουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κατά πάσα πιθανότητα η προσεγγιστική λύση που δίνει η μέθοδος έχει διαφορετική συμπεριφορά από την αναλυτική καθώς $n \to \infty$

(δ) Τι μπορούμε να πούμε για τις ποσότητες $(x^n)^2 + (y^n)^2$ για τις προσεγγίσεις x^n, y^n που παράγει η πεπλεγμένη μέθοδος Euler;

Λύση

(α) Το δοθέν σύστημα ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης γράφεται ισοδύναμα ως το ακόλουθο ΠΑΤ $2^{ης}$ τάξης:

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΣΔΕ του ΠΑΤ είναι:

$\lambda^2 + 1 = 0$ και έχει ρίζες $\lambda_{1,2} = \pm i$

Άρα η αναλυτική λύση της ΣΔΕ είναι:

$y(t) = c_1 \cdot \cos t + c_2 \sin t$, c_1, c_2 αυθ. σταθερές, $t \geq 0$.

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

Άρα η αναλυτική λύση του ΠΑΤ είναι: $y(t) = \sin t$,

$x(t) = \cos t$, $t \geq 0$.

άλλος τρόπος για την εύρεση της αναλυτικής λύσης

Το δοθέν σύστημα ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης γράφεται στη μορφή:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Άρα η αναλυτική λύση είναι: $\begin{cases} x(t) = c_1 \cos t - c_2 \sin t \\ y(t) = c_2 \cos t + c_1 \sin t \end{cases}$

Λαμβάνοντας υπόψην και τις αρχικές συνθήκες, έχουμε:

$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$, $t \geq 0$. (παρατηρηση $A^T = -A$ δηλαδή ο A είναι αντισυμμετρικός)

Επομένως ισχύει: $x^2(t) + y^2(t) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $t \geq 0$.

άλλος τρόπος για το (α) (χωρίς να βρούμε την αναλυτική λύση).

Έχουμε: $[x^2(t) + y^2(t)]' = 2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)y'(t) =$

$= -2x(t)y(t) + 2y(t)\cdot x(t) = 0$

Επομένως $x^2(t) + y^2(t) = C$, C αυθ. σταθερά, $t \geq 0$.
Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε: $C = x^2(0) + y^2(0) = 1$
Άρα ισχύει: $x^2(t) + y^2(t) = 1$, $t \geq 0$.

(β) Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Euler, το σύστημα ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης διακριτοποιείται ως εξής: (Για $h>0$)

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -y^n \\ x^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^{n+1} = x^n - hy^n \\ y^{n+1} = y^n + hx^n \end{cases}$$

Έχουμε: $(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n - hy^n)^2 + (y^n + hx^n)^2 =$

$= (x^n)^2 - \cancel{2hx^n y^n} + h^2(y^n)^2 + (y^n)^2 + \cancel{2hx^n y^n} + h^2(x^n)^2 =$

$= (1+h^2)\,[(x^n)^2 + (y^n)^2]$

Επαγωγικά, $(x^n)^2 + (y^n)^2 = (1+h^2)^n\,[(x^0)^2 + (y^0)^2]$

$= (1+h^2)^n$ Άρα $(x^n)^2 + (y^n)^2 \longrightarrow +\infty$ καθώς $n \to +\infty$

αφού $h > 0$

(γ) Με τη μέθοδο του τραπεζίου, το σύστημα ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης διακριτοποιείται ως εξής ($h>0$):

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n} \\ y^{n} \end{pmatrix} + \frac{h}{2}\left[\begin{pmatrix} -y^{n} \\ x^{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix} \right] \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^{n+1} = x^n - \frac{h}{2}\left(y^n + y^{n+1}\right) \\ y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left(x^n + x^{n+1}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^{n+1} - x^n = -\frac{h}{2}\left(y^n + y^{n+1}\right) & \times\left(x^{n+1} + x^n\right) \\ y^{n+1} - y^n = \frac{h}{2}\left(x^n + x^{n+1}\right) & \times\left(y^{n+1} + y^n\right) \end{cases}$$

Έχουμε $(x^{n+1} - x^n)(x^{n+1} + x^n) + (y^{n+1} - y^n)(y^{n+1} + y^n)$

$= -\frac{h}{2}(y^n + y^{n+1})(x^{n+1} + x^n) + \frac{h}{2}(x^n + x^{n+1})(y^{n+1} + y^n)$

$= 0 \Rightarrow$

$$(x^{n+1})^2 - (x^n)^2 + (y^{n+1})^2 - (y^n)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = (x^n)^2 + (y^n)^2$$

Επαγωγικά, $(x^n)^2 + (y^n)^2 = (x^0)^2 + (y^0)^2 = 1 \ \forall n.$

(δ) Με την πεπλεγμένη μέθοδο Euler το σύστημα ΣΔΕ 1ης τάξης διακριτοποιείται ως εξής: $(h>0)$

$$\begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{n} \\ y^{n} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -y^{n+1} \\ x^{n+1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^{n+1} = x^n - h y^{n+1} \\ y^{n+1} = y^n + h x^{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^n = x^{n+1} + h y^{n+1} \\ y^n = y^{n+1} - h x^{n+1} \end{cases}$$

Έχουμε: $(x^n)^2 + (y^n)^2 = (x^{n+1} + h y^{n+1})^2 + (y^{n+1} - h x^{n+1})^2$

$= \left[(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2\right](1 + h^2) \Rightarrow$

$$(x^{n+1})^2 + (y^{n+1})^2 = \frac{1}{1+h^2}\left[(x^n)^2+(y^n)^2\right]$$

Επαγωγικά, $(x^n)^2 + (y^n)^2 = \frac{1}{(1+h^2)^n}\left[(x^0)^2+(y^0)^2\right] =$

$= \frac{1}{(1+h^2)^n}$ Άρα $(x^n)^2+(y^n)^2 \to 0$ καθώς $n\to\infty$ αφού $h>0$.

Άσκηση 4.

Δίνεται το Π.Α.Τ. $\begin{cases} y'(t) = M\,y(t) & , t\geq 0 \\ y(t) = y_0 \end{cases}$

$M \in \mathbb{R}^{m,m}$ με $(Mx, x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$ (δηλαδή ο M είναι μη θετικά ορισμένος)

Αν y^n η προσέγγιση (με την πεπλεγμένη Euler) για την $y(t^n)$ και $t^n = nh$ (δηλαδή $t^0=0$), νδο

$\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$, $n\in\mathbb{N}^*$ όπου $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα.

(δηλαδή νδο η Ευκλείδεια νόρμα των προσεγγίσεων φθίνει)

Λύση

Εφαρμόζοντας την πεπλεγμένη Euler, η ΣΔΕ του Π.Α.Τ διακριτοποιείται ως εξής:

$$\bar{y}^{n+1} = \bar{y}^n + hM\bar{y}^{n+1}.$$

Έχουμε: $\|y^{n+1}\|^2 = (y^{n+1}, y^{n+1}) = (y^n + hMy^{n+1}, y^{n+1}) =$

$= (y^n, y^{n+1}) + h(My^{n+1}, y^{n+1})$

Επειδή $(My^{n+1}, y^{n+1}) \leq 0$ (από υπόθεση) έχουμε:

$$\|y^{n+1}\|^2 \leq (y^n, y^{n+1}) \overset{C-S}{\leq} \|y^n\|\cdot\|y^{n+1}\|$$

Άρα $\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|$

Υπενθύμιση Ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$(x,y) \le \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \right|^2 \le \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^{m} |y_i|^2$$

Άσκηση Να δειχτεί με τη μέθοδο του τραπεζίου

10/11/14

Επανάληψη στα προηγούμενα

Πεπλεγμένη μέθοδος Euler

Θεωρούμε το Π.Α.Τ : (1) $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$, $t \in [a,b]$.

Οι προσεγγίσεις της εν λόγω μεθόδου δίνονται από τον τύπο: $y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})$, $n = 0, 1, \dots, N-1$

Παρατήρηση 1

Έστω ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη lipschitz, δηλαδή: $\exists L \ge 0 \ \forall t \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$:

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le L |y_1 - y_2|.$$

Τότε, για h αρκετά μικρό, τέτοιο ώστε $h \cdot L < 1$, ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = y^n + h f(t^{n+1}, x)$, $x \in \mathbb{R}$.
Θα δείξουμε ότι η g είναι συστολή.

Για $x, \bar{x} \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$g(x) - g(\bar{x}) = h [f(t^{n+1}, x) - f(t^{n+1}, \bar{x})] \Rightarrow$$

$$|g(x) - g(\bar{x})| = h |f(t^{n+1}, x) - f(t^{n+1}, \bar{x})| \le hL |x - \bar{x}|$$

Για $hL < 1$ η g είναι συστολή
Επομένως έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο, το y^{n+1}.

Παρατήρηση 2

Είναι η μέθοδος καλά ορισμένη;
Πρέπει να εξετάσουμε αν η προσέγγιση υπάρχει και είναι μοναδική.

Παράδειγμα

Θεωρούμε τη ΣΔΕ $y' = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Η πεπλεγμένη μέθοδος Euler είναι:

$y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1} \Leftrightarrow (1-\lambda h) y^{n+1} = y^n$.

Παρατηρούμε ότι αν $\lambda > 0$ και $h = \frac{1}{\lambda}$ η παραπάνω σχέση ανάγεται στη μορφή $0 y^{n+1} = y^n$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(I) $y^n \neq 0$. Τότε δεν υπάρχει λύση

(II) $y^n = 0$. Τότε υπάρχουν άπειρες λύσεις.

Συμπέρασμα

Χρειαζόμαστε υποθέσεις για την f και το h για να είναι η μέθοδος καλά ορισμένη.

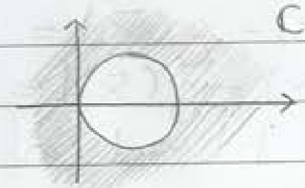
Συνέπεια της πεπλεγμένης μεθόδου Euler

$$\delta^n = \frac{h}{2} y''(\xi^n), \quad \xi^n \in (t^{n-1}, t^n)$$

Ευστάθεια της πεπλεγμένης μεθόδου Euler

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| = \max_{0 \le n \le N} |\varepsilon^n| \le e^{2L(b-a)} |y^0 - z^0|$$

περιοχή απόλυτης ευστάθειας



$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |1 - z| \ge 1 \}$$

Ακρίβεια της πεπλεγμένης μεθόδου Euler

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{M}{2L} \left[e^{2L(b-a)} - 1 \right] h \quad \text{όπου}$$

$$M = \max_{a \le t \le b} |y''(t)| \qquad \text{[Άσκηση 2]}$$

Θεώρημα

Έστω ότι η $f:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz, δηλαδή
$(f(t,y_1)-f(t,y_2),\ y_1-y_2)\le 0$. Τότε:

$$\max_{0\le n\le N}|\varepsilon^n| = \max_{0\le n\le N}|y(t^n)-y^n| \le \frac{b-a}{2}M\cdot h \quad \text{όπου} \quad M=\max_{a\le t\le b}|y''(t)|$$

Η μέθοδος του τραπεζίου

Οι προσεγγίσεις της λύσης του (1) με την εν λόγω μέθοδο δίνονται από τον τύπο:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n,y^n)+f(t^{n+1},y^{n+1})\right) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Παρατηρήσεις.

(1) Η μέθοδος είναι πεπλεγμένη
(2) Η τάξη ακρίβειας (ολικό σφάλμα) της μεθόδου είναι 2.
(3) Τρόπος κατασκευής: ολοκλήρωση.

Περιοχή απόλυτης ευστάθειας

Έστω το ΠΑΤ: $\begin{cases} y' = \lambda y, & t\ge 0 \\ y(0)=1 \end{cases}$

Η μέθοδος του τραπεζίου μετατρέπει το συνεχές δοθέν ΠΑΤ στο αντίστοιχο διακριτό:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}(\lambda y^n + \lambda y^{n+1}) \\ y^0 = 1 \end{cases}$$

Επομένως έχουμε: $\left(1-\frac{\lambda h}{2}\right)y^{n+1} = \left(1+\frac{\lambda h}{2}\right)y^n$

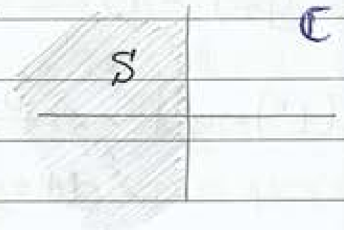
$$\Rightarrow y^{n+1} = \frac{1+\frac{\lambda h}{2}}{1-\frac{\lambda h}{2}}\cdot y^n \Rightarrow y^{n+1} = r(\lambda h)\,y^n \quad \text{όπου}$$

$$r(\lambda h) = \frac{1+\frac{\lambda h}{2}}{1-\frac{\lambda h}{2}}$$

Απαιτώντας $|r(\lambda h)| \leq 1$, έχουμε:

$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \} = \{ z \in \mathbb{C} : |z+2| \leq |z-2| \}$

$\rightarrow S = \mathbb{C}^-$



Η μέθοδος του μέσου

Οι προσεγγίσεις της λύσης του ΠΑΤ (1) με την εν λόγω μέθοδο δίνονται από τον τύπο:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Παρατηρήσεις

(1) Η μέθοδος είναι πεπλεγμένη

(2) Η μέθοδος του μέσου για τη Σ.Δ.Ε $y' = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}$ συμπίπτει με τη μέθοδο του τραπεζίου.

(3) Η μέθοδος του μέσου είναι Β-ευσταθής.

Ορισμός Μία μέθοδος είναι Β-ευσταθής αν-ν ισχύει η μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz και η ακολουθία που δημιουργείται είναι φθίνουσα, δηλαδή $\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \leq \|y^n - z^n\|$.

Απόδειξη (του (3)).

Έστω το συνεχές ΠΑΤ (1).

Θεωρούμε τα διακριτά Π.Α.Τ:

$$\begin{cases} y^{n+1} = y^n + h f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right) \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + h f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(z^n + z^{n+1})\right) \\ z^0 = z_0 \end{cases}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h\left[f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y^n + y^{n+1})\right) - f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(z^n + z^{n+1})\right)\right]$$

Θεωρούμε το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο του

$$\frac{1}{2}(y^n + y^{n+1}) - \frac{1}{2}(z^n + z^{n+1}) = \frac{1}{2}(y^n - z^n) + \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1})$$

με το $y^{n+1} - z^{n+1}$. Δηλαδή,

$$\left(y^{n+1} - z^{n+1}, \frac{1}{2}(y^n - z^n) + \frac{1}{2}(y^{n+1} - z^{n+1})\right)$$

Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις [ΑΣΚΗΣΗ], έχουμε:

$$\| y^{n+1} - z^{n+1} \| \leq \| y^n - z^n \|$$

Συνεπώς, η μέθοδος είναι B-ευσταθής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
Runge - Kutta (RK)

Συμβολισμοί και παραδείγματα

Οι μέθοδοι αυτοί εντάσσονται στην κατηγορία των μονοβηματικών μεθόδων.

(παράδειγμα πολυβηματικής μεθόδου
$$y^{n+2} = ay^n + by^{n+1} + h\gamma f(t^n, t^{n+1}, y^n, y^{n+1}).$$
)

Θεωρούμε το Π.Α.Τ (1) $\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Αναζητάμε συνάρτηση $y:[a,b] \to \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί το (1)

Για μια συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορούμε να γράφουμε:

$$\int_0^{\tau_i} \varphi(s)\, ds = \sum_{j=1}^{q} \overbrace{a_{ij}}^{\text{βάρη}} \varphi(\tau_j)$$ (κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης)

$i = 1, \dots, q$, $q \in \mathbb{N}$, $\tau_i \in \mathbb{R}$ (συνήθως $0 \le \tau_i \le 1$), $a_{ij} \in \mathbb{R}$

Επομένως, για το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \varphi(s) ds$ μπορούμε να γράφουμε:

$$\int_0^1 \varphi(s)\, ds \cong \sum_{j=1}^{q} b_j \varphi(\tau_j), \quad q \in \mathbb{N},\ b_j \in \mathbb{R}.$$

Τα a_{ij}, b_j, τ_j ορίζουν $q+1$ τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης.
Τα τ_i είναι οι κόμβοι σ' αυτούς τους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης.
Τα b_j είναι βάρη στον τύπο προσέγγισης του ολοκληρώματος στο $[0,1]$.
Τα a_{ij} είναι βάρη στον τύπο προσέγγισης του ολοκληρώματος στο $[0, \tau_i]$.

Κάθε ένα τέτοιο σύνολο σταθερών, ορίζει μία μέθοδο RK.

<u>Μορφή μητρώου</u>

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_q & \end{array} = \begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$$ όπου

$A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{q,q}$
$b = (b_1, \dots, b_q)^T$
$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_q)^T$

$\rightarrow \quad y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n)$ (Άμεση μέθοδος Euler).

Παράδειγμα 2.

Θεωρούμε το μητρώο $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$.

Τότε η μέθοδος RK γράφεται:

$$\left.\begin{cases} y^{n,1} = y^n + h f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = \underbrace{y^n + h f(t^{n,1}, y^{n,1})}_{g} \end{cases}\right\} \Rightarrow y^{n,1} = y^{n+1}$$

υπό την προϋπόθεση η g να είναι συστολή για μικρό h.

Άρα $\quad y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})$ (Πεπλεγμένη μέθοδος Euler).

19/11/14

Επανάληψη στα προηγούμενα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – [Runge - Kouta]

Θεωρούμε το ακόλουθο Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \quad t \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Για τη διαμέριση $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q\}$ του $[a, b]$ θεωρούμε τη μορφή μητρώου: (Butchest)

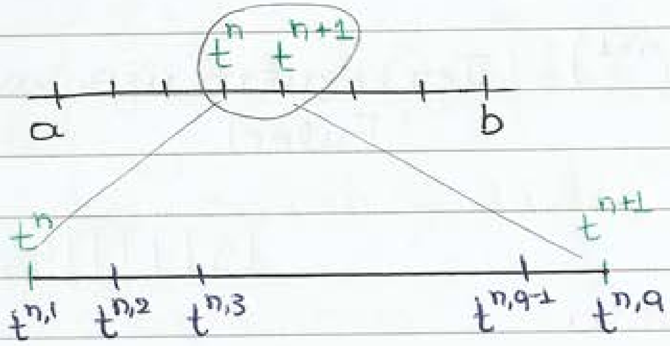
$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} & \tau_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} & \tau_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_q & \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array} \quad \text{όπου}$$

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{q,q} \qquad \tau = [\tau_1 \dots \tau_q]^T \qquad b^T = [b_1 \dots b_q]$$

Γενικός τύπος μεθόδων RK

- $y^0 = y_0$
- $y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j})$
- $y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i})$

Οι δύο τελευταίες σχέσεις μας δίνουν την προσέγγιση της y στο διάστημα $[t^n, t^{n+1}]$ όπως φαίνεται στο σχήμα.



Παρατήρηση

1η περίπτωση

Ο πίνακας A είναι γνήσια κάτω τριγωνικός. Τότε η μέθοδος RK που προκύπτει είναι άμεση.

2η περίπτωση

Ο πίνακας A δεν είναι γνήσια κάτω τριγωνικός. Τότε η μέθοδος RK είναι πεπλεγμένη.

Σε αυτή την περίπτωση καλούμαστε να επιλύσουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων που κατά πάσα πιθανότητα δεν είναι γραμμικές.

Παράδειγμα 1

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Το μητρώο αυτό παράγει την άμεση μέθοδο Euler

↳ $q = 1$

Ισχύει: $t^{n,1} = t^n$ αφού $t^{n,i} = t^n + \tau_i h \Rightarrow t^{n,1} = t^n + 0 \cdot h$

Έχουμε: $y^{n,1} = y^n$

$y^{n+1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1})$

Άρα $y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n)$ (→ τάξη ακρίβειας: 1)

Παράδειγμα 2.

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Το μητρώο αυτό παράγει την πεπλεγμένη μέθοδο Euler

↳ $q=1$

Ισχύει $t^{n,1} = t^n + \tau_1 h = t^n + h = t^{n+1}$

Έχουμε: $\left.\begin{array}{l} y^{n,1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n+1} = y^n + hf(t^{n,1}, y^{n,1}) \end{array}\right\} \Rightarrow y^{n,1} = y^{n+1}$

Έχουμε δείξει ότι η συνάρτηση: $g(x) = y^n + hf(t^{n,1}, x)$ είναι συστολή.

Άρα για μικρό h, έχει μοναδική λύση την $y^{n,1}$

Επομένως, $y^{n+1} = y^n + hf(t^{n+1}, y^{n+1})$

(→ τάξη ακρίβειας: 1

Υπενθύμιση

Μια συνάρτηση g καλείται συστολή αν-ν

$\exists s \in [0,1) : \forall x, \bar{x} \quad |g(x) - g(\bar{x})| \le s\,|x - \bar{x}|$

παραδείγματα

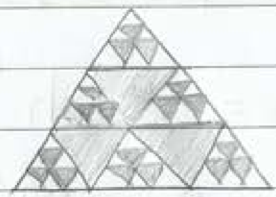
1. Η συνάρτηση $g(x) = sx + b$ με $s \in [0,1)$ είναι συστολή
2. Γραμμικοί μετασχηματισμοί, affine (περιγράφουν σημεία ισορροπίας)

$$w\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}}_{\text{μετατόπιση}}$$

Πληροφοριακά

<u>fractals</u> (μορφοκλασματικά σύνολα)
→ διάσταση (όχι ακέραια), σύνολο Cantor
→ εφαρμογές (σφουγγάρι κτλ)

<u>π.χ.</u> τρίγωνα Serpinski: διάσταση μεταξύ 0 και 1.



(καινούρια ύλη)

Παράδειγμα 3

$$\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & \end{array}$$

↳ $q=1$

το μητρώο αυτό παράγει τη <u>μέθοδο του μέσου</u>

Ισχύει: $t^{n,1} = t^n + \frac{h}{2}$

Έχουμε: $y^{n,1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1})$

$y^{n+1} = y^n + h f(t^{n,1}, y^{n,1})$

Άρα $y^{n,1} = \frac{y^{n+1} + y^n}{2}$

Επομένως, $y^{n+1} = y^n + h f\left(t^n + \frac{h}{2}, \frac{y^n + y^{n+1}}{2}\right)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$

τάξη ακρίβειας: 1

Παράδειγμα 4.

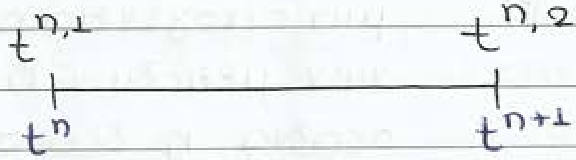
$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

↳ $q=2$

Αυτό το μητρώο παράγει τη <u>μέθοδο του τραπεζίου</u>

Ισχύει: $t^{n,1} = t^n + 0h = t^n$

$t^{n,2} = t^n + 1 \cdot h = t^n + h = t^{n+1}$



Έχουμε: ① $y^{n,1} = y^n$

② $y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{h}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2})$

για τα εσωτερικά σημεία και

③ $y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{h}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2})$

Από ②, ③ έχουμε ότι $y^{n+1} = y^{n,2}$

Άρα τελικά,

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1}) \right]$$

Η τάξη ακρίβειας αυτής της μεθόδου είναι 2.

Παράδειγμα 5.

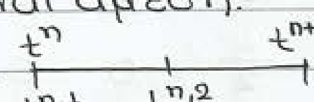
$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 1 & \end{array}$$

↳ $q = 2$

Αυτό το μητρώο περιγράφει τη <u>βελτιωμένη μέθοδο Euler</u>

Παρατηρούμε ότι ο A είναι γνήσια κάτω τριγωνικός. Άρα η μεθοδολογία που θα προκύψει θα είναι άμεση.

Ισχύει $t^{n,1} = t^n$ και $t^{n,2} = t^n + \frac{h}{2}$.



Έχουμε: $y^{n,1} = y^n$

$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1})$

$y^{n+1} = y^n + h f(t^{n,2}, y^{n,2})$

Άρα τελικά, $y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n)$

$y^{n+1} = y^n + h f(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,2})$ υπολογίζεται από την πάνω σχέση

Η τάξη ακρίβειας αυτής της μεθόδου είναι 2.

Παράδειγμα 6

$$\begin{array}{cc|c} \mu & 0 & \mu \\ 1-2\mu & 0 & 1-\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

Αυτό το μητρώο περιγράφει μια οικογένεια ημιπεπλεγμένων μεθόδων RK με δύο στάδια ή δύο σημεία.

$\hookrightarrow q=2$

1η περίπτωση Για $\mu \in \mathbb{R} \setminus \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ η μέθοδος είναι 2ης τάξης ακρίβειας.

2η περίπτωση Για $\mu = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$ η μέθοδος είναι 3ης τάξης ακρίβειας, δηλαδή αν $h=0.1$ τότε η ακρίβεια της Euler είναι της τάξης του βήματος (0.1) ενώ η ακρίβεια αυτής της μεθοδολογίας είναι 0.001.

Παράδειγμα 7

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\mu & \frac{1}{2}-\mu \\ \frac{1}{4}+\mu & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}+\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Για $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (ιδιοτιμή του A) το μητρώο αυτό δίνει μια μέθοδο RK δύο σημείων τάξης ακρίβειας 4.
Η μεθοδολογία αυτή λέγεται μέθοδος Gauss-Legendre 2 σημείων.

$\hookrightarrow q=2$

Παράδειγμα 8

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

Το μητρώο αυτό δίνει μια μέθοδο RK τριών σημείων με ακρίβεια 3ης τάξης
Παρατηρούμε ότι ο A είναι γνήσια κάτω τριγωνικός και επομένως η μέθοδος που θα προκύψει είναι άμεση.

$\hookrightarrow q=3$

Παράδειγμα 9

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

↳ $q = 4$.

Το μητρώο αυτό δίνει την κλασική μέθοδο RK 4 σημείων με τάξη ακρίβειας 4.
Παρατηρούμε ότι ο A είναι γνήσια κάτω τριγωνικός και επομένως η μέθοδος που θα προκύψει είναι άμεση.

Ισχύει:
$$\begin{aligned} t^{n,1} &= t^n + 0\cdot h = t^n \\ t^{n,2} &= t^n + \frac{h}{2} \\ t^{n,3} &= t^n + \frac{h}{2} \\ t^{n,4} &= t^n + h = t^{n+1} \end{aligned}$$

Έχουμε:
$$\begin{aligned} y^{n,1} &= y^n \\ y^{n,2} &= y^n + \frac{h}{2}\cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n,3} &= y^n + \frac{h}{2}\cdot f(t^{n,2}, y^{n,2}) \\ y^{n,4} &= y^n + h\cdot f(t^{n,3}, y^{n,3}) \\ y^{n+1} &= y^n + \frac{h}{6}\cdot f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{h}{3}\left[f(t^{n,2}, y^{n,2}) + f(t^{n,3}, y^{n,3})\right] + \frac{h}{6} f(t^{n,4}, y^{n,4}). \end{aligned}$$

Άρα
$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{6}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n,4})\right] + \frac{h}{3}\left[f\left(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,2}\right) + f\left(t^n + \frac{h}{2}, y^{n,3}\right)\right]$$

24/11/14

Επιλυσιμότητα μεθόδων Runge-Kutta

(1) Στην περίπτωση των άμεσων μεθόδων R-K, τα $y^{n,i}$ υπολογίζονται αναδρομικά, οπότε είναι καλώς ορισμένα, δηλαδή είναι μονοσήμαντα.

(2) Στην περίπτωση των πεπλεγμένων R-K, υπάρχει πρόβλημα γιατί προκύπτουν μη γραμμικές εξισώσεις. Το σύστημα λύνεται μονοσήμαντα, τουλάχιστον για μικρό h.

Πρόταση [Ύπαρξη και μοναδικότητα προσεγγίσεων]
Θεωρούμε το Π.Α.Τ.: $\begin{cases} y' = f(t,y) & , t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Έστω ότι η f πληροί την ολική συνθήκη Lipschitz, δηλαδή:
$\exists L \geq 0 \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} \ \forall t \in [a,b] : |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ (*)
και έστω ότι $h < \frac{1}{\gamma}$, $\gamma = L \cdot \max\limits_{1 \leq i \leq q} \sum\limits_{j=1}^{q} |a_{ij}|$.

Τότε το σύστημα (1) $y^{n,i} = y^n + h \sum\limits_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j})$ $i = 1, \dots, q$

λύνεται μονοσήμαντα ως προς τα $y^{n,i}$, $i = 1, \dots, q$.

Σημείωση (σκιαγράφηση απόδειξης)
Θεωρούμε την απεικόνιση $F : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q$ με

$F_i(\bar{x}) = y^n + h \sum\limits_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot f(t^{n,j}, x_j)$ όπου

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_q)^T$ και $\bar{F}(\bar{x}) = (F_1(\bar{x}), F_2(\bar{x}), \dots, F_q(\bar{x}))^T$

Αρκεί νδο για $h < \frac{1}{\gamma}$ η $\bar{F}$ έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο, δηλαδή αρκεί νδο είναι συστολή. Τότε θα έχει μονοσήμαντη λύση την $y^{n,i}$, $i = 1, \dots, q$

Παρατήρηση
(1) Το "γενικά" μη γραμμικό σύστημα (1) έχει μοναδική λύση όταν $h < \frac{1}{\gamma}$, $\gamma = L \cdot \max\limits_{1 \leq i \leq q} \sum\limits_{j=1}^{q} |a_{ij}|$

(2) Όταν η σταθερά Lipschitz L είναι αρκετά μεγάλη, η συνθήκη αυτή συνιστά σοβαρό περιορισμό του βήματος h. Τέτοια συστήματα (με μεγάλο L) λέγονται άκαμπτα.

(3) Η λύση $y^n = (y^{n,i}) \in \mathbb{R}^q$, $1 \le i \le q$ του μη γραμμικού συστήματος (1) μπορεί να προσεγγιστεί είτε με την επαναληπτική μέθοδο: $Y^n_{(\ell+1)} = \bar{F}(Y^n_{(\ell)})$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$ $\bar{F} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$, είτε με τη μέθοδο του Νεύτωνα (ή με κάποια παραλλαγή της).

Η μέθοδος του Νεύτωνα (για μη γραμμικές εξισώσεις)

→ Για μια διάσταση (βαθμωτή περίπτωση):

Αν έχουμε στη διάθεσή μας μια αρχική προσέγγιση της x π.χ. x_0, τότε μια επανάληψη της μεθόδου, δίνει την εξής νέα προσέγγιση: $x_1 = x_0 - \dfrac{g(x_0)}{g'(x_0)}$ (2) (σελ 60-61 Ακριβής-Δούγαλης)

και γενικά: $x^{n+1} = x^n - \dfrac{g(x^n)}{g'(x^n)}$

παρατηρούμε ότι απαιτούνται δυο συναρτησιακοί υπολογισμοί

(2) $\Rightarrow (x_1 - x_0) g'(x_0) + g(x_0) = 0$

(ανάπτυγμα Taylor με όρους μέχρι και 1ης τάξης)

Η μέθοδος γραμμικοποιεί το πρόβλημα, δηλαδή προσεγγίζει τη λύση μέσω γραμμικών εξισώσεων.

→ Για την περίπτωση διανύσματος $\bar{x}$

η μέθοδος γράφεται ως: $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 - \dfrac{\bar{g}(\bar{x}_0)}{J(\bar{x}_0)}$ όπου

J ο Ιακωβιανός πίνακας με $J_{ij}(x) = \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)$

παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε το σύστημα $\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, t) \\ x_2 = g_2(x_2, t) \end{cases}$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\bar{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ Τότε:

$\bar{x}^{n+1} = \bar{x}^n + \dfrac{\bar{g}(\bar{x}^n)}{J(\bar{x}^n)}$ όπου $J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$

με $J_{11} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}$, $J_{12} = \frac{\partial g_1}{\partial x_2}$

$J_{21} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}$, $J_{22} = \frac{\partial g_2}{\partial x_2}$. Δηλαδή,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{n} - \frac{\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}(\bar{x}^n)}{\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}}$$

Ευστάθεια των μεθόδων R-K.

Πρόταση

Θεωρούμε μια μέθοδο R-K, για την οποία πληρούνται οι υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης (ολική συνθήκη Lipschitz και $h < \frac{1}{\gamma}$, $\gamma = L \cdot \max_{1 \le i \le q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|$)

Θεωρούμε τα ΠΑΤ:

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,B] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z' = f(t,z), & t \in [a,b] \\ z(a) = z_0 \end{cases}$$

οι προσεγγίσεις των οποίων δίνονται από τις σχέσεις:

$$(1) \begin{cases} y^0 = y_0 \in \mathbb{R} \text{ δεδομένο} \\ y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \quad i = 1, \dots, q \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i \cdot f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} z^0 = z_0 \in \mathbb{R} \text{ δεδομένο} \\ z^{n,i} = z^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}) \quad i = 1, \dots, q \\ z^{n+1} = z^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, z^{n,i}) + \rho^n \end{cases}$$

$n = 0, 1, \dots, N$, $\rho^0, \rho^1, \dots, \rho^N$ δεδομένοι αριθμοί

Τότε $\exists$ σταθερές C_1, C_2 ανεξάρτητες του h, τέτοιες ώστε

(3) $$\max_{1\le n\le N} |y^n - z^n| \le C_1 |y^0 - z^0| + \frac{C_2}{h} \max_{0\le n\le N-1} |\rho^n|$$

Απόδειξη

Αφαιρώντας κατά μέλη τις ενδιάμεσες σχέσεις στις (1), (2) και χρησιμοποιώντας την ολική συνθήκη Lipschitz λαμβάνουμε:

$$|y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + hL \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|\, |y^{n,j} - z^{n,j}|$$

$$\le |y^n - z^n| + hL \cdot \max_{1\le i\le q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}| \cdot \max_{1\le j\le q} |y^{n,j} - z^{n,j}|$$

$$\Rightarrow |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + h\cdot\gamma \max_{1\le j\le q} |y^{n,j} - z^{n,j}|$$

$$\Rightarrow \max_{1\le i\le q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \le |y^n - z^n| + h\cdot\gamma \max_{1\le i\le q} |y^{n,i} - z^{n,i}|$$

$$\Rightarrow \max_{1\le i\le q} |y^{n,i} - z^{n,i}| \le \frac{1}{1-h\gamma} |y^n - z^n|$$

Από την υπόθεση, $h < \frac{1}{\gamma} \Rightarrow 1 - h\gamma > 0$

Επομένως, για $h \le h_0 = \frac{1}{\gamma}$, $\exists$ σταθερά C (ανεξάρτητη του h) τέτοια ώστε:

(4) $$|y^{n,i} - z^{n,i}| \le C\, |y^n - z^n| \quad , \quad i = 1, \dots, q, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

με $C = \frac{1}{1 - h_0 \cdot \gamma}$.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις τελευταίες σχέσεις στις (1), (2) και χρησιμοποιώντας την ολική συνθήκη Lipschitz, λαμβάνουμε:

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \le |y^n - z^n| + hL\sum_{i=1}^{q}|b_i|\,|y^{n,i} - z^{n,i}| + |\rho^n|$$

Λόγω της (4) έχουμε:

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \le \left(1 + hL\cdot C\sum_{i=1}^{q}|b_i|\right)|y^n - z^n| + |\rho^n|$$

Υπενθύμιση [ΛΗΜΜΑ]

Έστω $\delta > 0$ και $K, d_0, d_1, \ldots \geq 0$ τέτοιοι ώστε $d_{i+1} \le (1+\delta)d_i + K$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Τότε ισχύει:

$$d_n \le d_0 \cdot e^{n\delta} + K\cdot\frac{e^{n\delta} - 1}{\delta}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Από το λήμμα, θέτοντας $C' = LC\sum_{i=1}^{q}|b_i|$, έχουμε:

$$(6)\quad \max_{1\le n\le N}|y^n - z^n| \le e^{C'(b-a)}|y^0 - z^0| + \frac{e^{C'(b-a)} - 1}{C'\cdot h}\max_{0\le n\le N-1}|\rho^n|$$

Για $\rho^n = 0$, από τη σχέση (6) προκύπτει η ευστάθεια των μεθόδων RK.

Τάξη ακρίβειας μεθόδων RK

Θεωρούμε το Π.Α.Τ.: $\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

και έστω ότι η f πληροί την ολική συνθήκη Lipschitz. Η λύση y του Π.Α.Τ. είναι αρκετά ομαλή συνάρτηση (smooth function) δηλαδή έχει συνεχείς παραγώγους ανώτερης τάξης.

Σφάλμα συνέπειας ή τοπικό σφάλμα δ^n της μεθόδου RK

$$J^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(t^{n,j}, J^{n,j}) \quad i = 1, \ldots, q$$

Έστω ότι οι προσεγγίσεις $\xi^{n,i}$ είναι καλά ορισμένες (δηλαδή η f πληροί την ολική συνθήκη lipschitz και $\gamma \cdot h<1$)
Τότε $\delta^n = [y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, \xi^{n,i})] - y(t^{n+1})$ όπου

$y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, \xi^{n,i})$ είναι η προσέγγιση που βρίσκουμε αν ξεκινήσουμε από την $y(t^n)$ και κάνουμε βήμα $t^{n+1} = t^n + h$ και $y(t^{n+1})$ είναι η αναλυτική λύση του ΠΑΤ.
Το δ^n λέγεται σφάλμα συνέπειας της μεθόδου RK.

Τάξη ακρίβειας ή απλώς τάξη της μεθόδου RK λέγεται ο μεγαλύτερος εκθέτης p για τον οποίο υπάρχει σταθερά $\tilde{C}$ που εξαρτάται από την y και την f αλλά είναι ανεξάρτητη του βήματος h, τέτοια ώστε:

$$\max_{0 \le n \le N-1} |\delta^n| \le \tilde{C} \cdot h^{p+1}.$$

Θεώρημα (απόδειξη στο επόμενο μάθημα)
Θεωρούμε το Π.Α.Τ: $\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Έστω ότι η f πληροί την ολική συνθήκη Lipschitz.
Έστω ακόμη ότι f, y είναι ομαλές συναρτήσεις και η τάξη της μεθόδου είναι p.
Τότε έχουμε την εκτίμηση του σφάλματος:

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{\tilde{C}}{C'} \left[e^{C'(b-a)} - 1 \right] \cdot h^p \text{ όπου}$$

p η τάξη της μεθόδου και $C' = L \cdot C \sum_{i=1}^{q} |b_i|$

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε τη μέθοδο RK 4ης τάξης, η οποία περιγράφεται από το μητρώο:

$$
\begin{array}{cccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 &
\end{array}
\qquad (q=4).
$$

Τότε
$$
\begin{aligned}
t^{n,1} &= t^n \\
t^{n,2} &= t^n + \frac{h}{2} \\
t^{n,3} &= t^n + \frac{h}{2} \\
t^{n,4} &= t^n + h = t^{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y^{n,1} &= y^n \\
y^{n,2} &= y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\
y^{n,3} &= y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \\
y^{n,4} &= y^n + h f(t^{n,3}, y^{n,3}) \\
y^{n+1} &= y^n + \frac{h}{6}\Big[f(t^{n,1}, y^{n,1}) + 2f(t^{n,2}, y^{n,2}) + \\
&\qquad 2f(t^{n,3}, y^{n,3}) + f(t^{n,4}, y^{n,4}) \Big] \\
&\qquad + O(h^5).
\end{aligned}
$$

Άσκηση

Νδο μια μέθοδος RK έχει τάξη ακρίβειας $p \geq 1 \Leftrightarrow$ $b_1 + b_2 + \ldots + b_q = 1$.

Λύση.

$$
\delta^n = \underbrace{\Big[y(t^n) + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \Big]}_{y^{n+1} \text{ η προσέγγιση με τη μέθοδο RK}} - y(t^{n+1})
$$

Θέλουμε νδο $\delta^n = O(h^2) \Leftrightarrow b_1 + b_2 + \ldots + b_q = 1$

Έχουμε ότι $y^{n,i} = y(t^n) + O(h)$

και $t^{n,i} = t^n + O(h)$

Από το ανάπτυγμα Taylor είναι:

$f(t^{n,i}, y^{n,i}) = f(t^n, y(t^n)) + O(h)$.

Άρα $\delta^n = y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i [f(t^n, y(t^n)) + O(h)] - y(t^{n+1}) =$

$$= y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^n, y(t^n)) + O(h^2) - y(t^{n+1}) =$$

$$= \cancel{y(t^n)} + h\sum_{i=1}^{q} b_i \cdot y'(t^n) + O(h^2) - [\cancel{y(t^n)} + h y'(t^n) + O(h^2)] =$$

$$= h\left(\sum_{i=1}^{q} b_i - 1\right) y'(t^n) + O(h^2)$$

Για να είναι $\delta^n = O(h^2)$, πρέπει $\sum_{i=1}^{q} b_i - 1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{q} b_i = 1$.

διότι διαφορετικά, θα ήταν $\delta^n = O(h)$.

01/12/14

Θεώρημα [εκτίμηση σφάλματος μεθόδων RK] υπενθύμιση

Έστω ότι ισχύει η συνθήκη Lipschitz για την f και f και y είναι ομαλές συναρτήσεις.

Έστω $\gamma = L \cdot \max_{1 \le i \le q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|$, $h_0 > 0$ τέτοια ώστε

$0 < h \le h_0$ και $\gamma h < L$.

Θεωρούμε επίσης ότι για τη μέθοδο RK ισχύει:

$\max_{0 \le n \le N} |\delta^n| \le \tilde{C} h^{p+1}$ όπου $\tilde{C}$ σταθερά και p είναι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου.

Τότε έχουμε:

$$\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{\tilde{C}}{C'} \left[e^{C'(b-a)} - 1 \right] \cdot h^p$$

όπου $\tilde{C}$, $C' = L \cdot C \sum_{i=1}^{q} |b_i|$ σταθερές, ανεξάρτητες του βήματος h.

Παρατήρηση

Αν $p > 1$ η RK είναι καλύτερη σε τάξη ακρίβειας από την Euler.

Απόδειξη.

Μπορούμε να γράφουμε:

$$\begin{cases} \zeta^{n,i} = y(t^n) + h \cdot \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, \zeta^{n,j}) & , i=1,\dots,q \\ y(t^{n+1}) = y^{n+1} \underset{(\acute{\eta}\ +)}{\underset{\downarrow}{-}} \delta^n = \left[y(t^n) + h \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \right] - \delta^n \end{cases}$$

όπου $\zeta^{n,i}$ είναι τα ενδιάμεσα βήματα της μεθόδου

$y(t^n), y(t^{n+1})$ η αναλυτική λύση του προβλήματος

y^{n+1} η προσεγγιστική λύση του προβλήματος

δ^n το τοπικό σφάλμα

Για την ευστάθεια της μεθόδου RK έχουμε δείξει το εξής:

Αν $\rho^0, \rho^1, \dots, \rho^{N-1}$ δοσμένοι αριθμοί και C_1, C_2 σταθερές ανεξάρτητες του h, τότε:

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C_1 \underbrace{|y^0 - z^0|}_{=0} + \frac{C_2}{h} \max_{0 \le n \le N-1} |\rho^n|$$

$$\Rightarrow \max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le C_1 |y(a) - y^0| + \frac{C_2}{h} \cdot \max_{0 \le n \le N-1} |\delta^n|$$

Επομένως, $\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{C_2}{h} \max_{0 \le n \le N-1} |\delta^n|$

Παρατηρήσεις:

1. $|\delta^n|$ ή $|-\delta^n|$
2. $|\delta^n|$ είναι το τοπικό σφάλμα της μεθόδου, δηλαδή το σφάλμα σε κάθε βήμα.
   Το μέγιστο από αυτά είναι το ολικό σφάλμα της μεθόδου.

Συνεπώς, $\max_{0 \le n \le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{C_2}{\cancel{h}} \tilde{c} \cdot h^p \cdot \cancel{h}$

όπου $C_2 = \dfrac{e^{c'(b-a)} - 1}{c'}$, $c' = Lc \sum_{i=1}^{q} |b_i|$

Υπενθύμιση - Παρατήρηση

Σε άσκηση του προηγούμενου μαθήματος δείξαμε ότι μία μέθοδος RK είναι τάξης ακρίβειας $p \geq 1$ αν-ν $\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$. Τότε, η μέθοδος RK λέγεται συνεπής.

Άσκηση [3.2 Ακριβής - Δούγαλης].

Να δειχτεί ότι η μέθοδος RK που περιγράφεται από το μητρώο $\begin{array}{c|c} 1/3 & 1/3 \\ \hline & 1 \end{array}$ έχει τάξη ακριβώς ένα

Λύση

Πρέπει νδο $p=1$.

$$q=1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{q} b_i = b_1 = 1.$$

Λόγω της προηγούμενης παρατήρησης θα είναι: $p \geq 1$.
(Ακολουθεί η πλήρης αιτιολόγηση)

Όπως και στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος μπορούμε να γράψουμε:

$$\zeta^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{3} f(t^{n,1}, \zeta^{n,1}) \xrightarrow{t^{n,1} = t^n + \frac{h}{3}}$$

$$\zeta^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{3} f\left(t^n + \frac{h}{3}, \zeta^{n,1}\right)$$

και $\delta^n = y^{n+1} - y(t^{n+1})$

$$= \left[y(t^n) + h \cdot f\left(t^n + \frac{h}{3}, \zeta^{n,1}\right)\right] - y(t^{n+1})$$

Παρατηρούμε ότι: $\zeta^{n,1} = y(t^n) + O(h)$.

Άρα,

$$\delta^n = y(t^n) + h\left[f(t^n \quad , y(t^n)) + O(h)\right] - y(t^{n+1})$$

Από Θ. Taylor: $y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n) + O(h^2)$

Επομένως,

$$\delta^n = \cancel{y(t^n)} + h f(t^n \quad , y(t^n)) + O(h^2) - \cancel{y(t^n)} - h y'(t^n) + O(h^2)$$

$\Rightarrow \delta^n = h \cdot \cancel{y'(t^n)} + O(h^2) - \cancel{h y'(t^n)} + O(h^2)$

$\Rightarrow \delta^n = O(h^2)$

Αρα η τάξη της μεθόδου RK είναι τάξης 1 ή παραπάνω, δηλαδή $p \geq 1$. (1)

Για να δείξουμε ότι η τάξη δεν είναι μεγαλύτερη του 1, θεωρούμε το ακόλουθο Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y'(t) = 2t \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

με αναλυτική λύση $y(t) = t^2$.

Παρατήρηση: Αν θέλαμε να δείξουμε ότι η τάξη της μεθόδου δεν είναι μεγαλύτερη του 2, θα έπρεπε να θεωρήσουμε ένα ΠΑΤ με $f(t, y(t)) = c t^2$, $c \in \mathbb{R}^*$.

Επομένως, το τοπικό σφάλμα της μεθόδου RK για το εν λόγω ΠΑΤ είναι:

$$\delta^n = y(t^n) + h \cdot 2\left(t^n + \frac{h}{3}\right) - y(t^{n+1})$$

$$= (t^n)^2 + 2h \cdot t^n + \frac{2}{3} h^2 - (t^{n+1})^2$$

$$= (t^n)^2 + 2h \cdot t^n + \frac{2}{3} h^2 - (t^n + h)^2$$

$$= \cancel{(t^n)^2} + \cancel{2h \cdot t^n} + \frac{2}{3} h^2 - \cancel{(t^n)^2} - \cancel{2h t^n} - h^2$$

$$= -\frac{1}{3} h^2$$

$$\Rightarrow |\delta^n| \geq \frac{h^2}{3}$$

Συνεπώς, η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι το πολύ 1. δηλαδή $p \leq 1$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow p = 1$ δηλαδή η μέθοδος RK έχει τάξη ακρίβειας 1.

Παρατηρήσεις

(1) προσδιορισμός τάξης ακρίβειας (p) μιας μεθόδου RK (χωρίς απόδειξη)

(a) Για μια πεπλεγμένη μέθοδο R.K. ισχύει: $p \le 2q$.

(b) Για μια άμεση μέθοδο RK ισχύει $p \le q$.

Δηλαδή μια πεπλεγμένη μέθοδος RK είναι πιο ακριβής (έχει καλύτερη απόλυτη ευστάθεια) από μία άμεση. Ωστόσο, είναι πιο δύσκολο να υλοποιηθεί διότι καταλήγουμε σε συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων και όχι σε αναδρομικές σχέσεις.

(2) ανάπτυγμα Taylor

Το ανάπτυγμα Taylor 3ης τάξης (⇒ το σφάλμα είναι 4ης τάξης ακρίβειας) της $y(t^{n+1})$ γύρω από το $y(t^n)$ είναι:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \cdot y'(t^n) + \frac{h^2}{2!} y''(t^n) + \frac{h^3}{3} y'''(t^n) + O(h^4)$$

Ισχύει: $y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$. Άρα

$$\cdot\ y''(t^n) = \left(y'(t^n)\right)' = \left(f(t^n, y(t^n))\right)' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= f_t(t^n, y(t^n)) + f_y(t^n, y(t^n)) \cdot f(t^n, y(t^n))$$

$$= f_t + f_y \cdot f$$

$$\cdot\ y'''(t^n) = \left(y''(t^n)\right)' = \left(f_t + f_y \cdot f\right)'$$

$$= f_{tt} + f_{ty} \cdot f + (f_{yt} + f_{yy} \cdot f) f + f_y f'$$

$$= f_{tt} + 2f f_{ty} + f^2 f_{yy} + f_y (f_t + f_y \cdot f)$$

$$= f_{tt} + 2f f_{ty} + f^2 f_{yy} + f_t f_y + f_y^2 f.$$

Άρα το ανάπτυγμα Taylor γράφεται:

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h \cdot f + \frac{h^2}{2} (f_t + f_y \cdot f) +$$

$$+ \frac{h^3}{3} (f_{tt} + 2f f_{ty} + f^2 f_{yy} + f_t f_y + f_y^2 f) + O(h^4)$$

Άσκηση

Να δειχτεί ότι η πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου με μητρώο $\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$ έχει τάξη ακρίβειας 2.

Λύση

$q=1$.

Η μέθοδος RK περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\zeta^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{2} f\left(t^n + \frac{h}{2}, \zeta^{n,1}\right)$$

$$y^{n+1} = y(t^n) + h f\left(t^n + \frac{h}{2}, \zeta^{n,1}\right)$$

και ισχύει $\delta^n = y^{n+1} - y(t^{n+1}) \Rightarrow$

$$\delta^n = y(t^n) + h f\left(t^n + \frac{h}{2}, \zeta^{n,1}\right) - y(t^{n+1})$$

Πρέπει νδο το δ^n είναι τάξης ακρίβειας ακριβώς 3.

Έχουμε: $f\left(t^n + \frac{h}{2}, \zeta^{n,1}\right) = f\left(t^n + \frac{h}{2}, y(t^n) + \frac{h}{2} f\left(t^n + \frac{h}{2}, \zeta^{n,1}\right)\right)$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial t}(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(t^n, y(t^n)) \cdot f(t^n, y(t^n)) + O(h^2)$$

Επομένως,

$$\delta^n = \cancel{y(t^n)} + \cancel{h f(t^n, y(t^n))} + \frac{h^2}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2} f_y(t^n, y(t^n)) \cdot f(t^n, y(t^n)) + O(h^3)$$
$$- \left\{ \cancel{y(t^n)} + \cancel{h f(t^n, y(t^n))} + \frac{h^2}{2}\left[f_t(t^n, y(t^n)) + f_y(t^n, y(t^n)) \cdot f(t^n, y(t^n))\right] + O(h^3) \right\}$$

$\Rightarrow \delta^n = O(h^3)$

Άρα η τάξη ακρίβειας της μεθόδου RK είναι τουλάχιστον 2, δηλαδή $p \geq 2$. (1)

Θεωρούμε το ΠΑΤ : $\begin{cases} y'(t) = 3t^2 & , t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$

με αναλυτική λύση $y(t) = t^3$.

Τότε
$$\begin{aligned} \delta^n &= y^{n+1} - y(t^{n+1}) \\ &= y(t^n) + h \cdot 3\left(t^n + \frac{h}{2}\right)^2 - y(t^{n+1}) \\ &= (t^n)^3 + 3h\left[(t^n)^2 + h \cdot t^n + \frac{h^2}{4}\right] - (t^n + h)^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta^n = \cancel{(t^n)^3} + \cancel{3h \cdot (t^n)^2} + \cancel{3h^2 t^n} + \frac{3}{4}h^3 - \cancel{(t^n)^3} - \cancel{3h(t^n)^2} - \cancel{3h^2 t^n} - h^3 = -\frac{1}{4}h^3$$

Άρα $|\delta^n| \geq \frac{h^3}{4}$

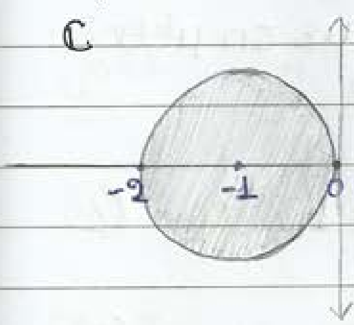
Συνεπώς, η μέθοδος RK έχει τάξη ακρίβειας το πολύ 2, δηλαδή $p \leq 2$. (2)

(1), (2) $\rightarrow$ Η μέθοδος RK έχει τάξη ακρίβειας 2 ακριβώς, δηλαδή $p = 2$.

Περιοχή Απόλυτης Ευστάθειας.

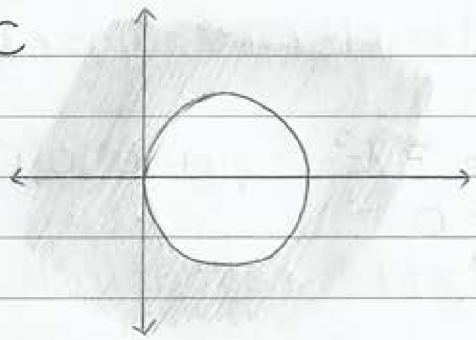
Υπενθύμιση

▸ Άμεση Euler: $S = \{ \underset{\overset{\|}{Lh}}{z} \in \mathbb{C} : |1 + z| \leq 1 \}$



Η άμεση Euler είναι ευσταθής σε μικρή περιοχή

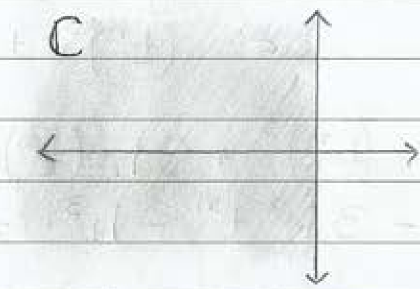
- **Πεπλεγμένη Euler:** $S = \{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{1-z} \leq 1 \}$



Η πεπλεγμένη Euler είναι ευσταθής σχεδόν παντού

- **Πεπλεγμένες μέθοδοι τραπεζίου και μέσου:**

$$r(z) = \frac{1 + \frac{z}{2}}{1 - \frac{z}{2}}$$



τέλος υπενθύμισης

- **Μέθοδοι RK**

Θεωρούμε το πρόβλημα δοκιμής:

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0, \ \lambda \in \mathbb{C}, \ Re(\lambda) < 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

με αναλυτική λύση $y(t) = e^{\lambda t}$.

Θεωρούμε μια μέθοδο RK με μητρώο $\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$ και θετικό βήμα h.

Το πρόβλημα δοκιμής διακριτοποιείται με τη μέθοδο RK ως εξής:

$$\begin{cases} y^{n,i} = y^n + \lambda h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \cdot y^{n,j}, \quad i = 1, \dots, q & (1) \\ y^{n+1} = y^n + \lambda h \sum_{i=1}^{q} b_i \, y^{n,i} & (2) \end{cases}$$

· Μπορούμε να γράψουμε την (1) ως εξής:

$$I_q \cdot \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n \\ y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} + \lambda h \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix}$$

και ισοδύναμα,

$$(I_q - \lambda h A) \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n \\ y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Εάν ο πίνακας $I_q - \lambda h A$ αντιστρέφεται, τότε

$$\begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = (I_q - \lambda h A)^{-1} \begin{pmatrix} y^n \\ y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = (I_q - \lambda h A)^{-1} \cdot y^n \vec{e} \quad (3)$$

όπου $\vec{e} = (1 \ 1 \ \ldots \ 1)^T \in \mathbb{R}^q$

· Μπορούμε να γράψουμε τη (2) ως εξής:

$$y^{n+1} = y^n + \lambda h\, b^T \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ y^{n,2} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} \xRightarrow{(3)}$$

$$y^{n+1} = y^n + \lambda \cdot h \cdot b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} y^n \cdot \vec{e} \Rightarrow$$

$$y^{n+1} = [1 + \lambda h \cdot b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} \vec{e}\,]\, y^n$$

· Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$r(\lambda h) = 1 + \lambda h \cdot b^T (I_q - \lambda h \cdot A)^{-1} \cdot \vec{e} \quad \Longrightarrow$$

$$r(z) = 1 + z\, b^T (I_q - zA)^{-1} \cdot \vec{e}$$

Έχουμε δηλαδή, $y^{n+1} = r(\lambda h)\, y^n$.

- Θέτουμε $\vec{w} = (I_q - zA)^{-1} \cdot \vec{e}$

$$\Rightarrow (I_q - zA)\vec{w} = \vec{e}$$ γραμμικό σύστημα q εξισώσεων με q αγνώστους.

Αν λύσουμε το σύστημα αυτό, ο παρονομαστής θα είναι $\det(I_q - zA)$ το οποίο είναι ένα πολυώνυμο με βαθμό το πολύ q.

<u>Συμπέρασμα</u> Η $r(z)$ είναι ρητή συνάρτηση και ο βαθμός του αριθμητή και του παρονομαστή είναι το πολύ q.

08/12/14

Περιοχές απόλυτης ευστάθειας μεθόδων RK.

Θεωρούμε το πρόβλημα δοκιμής:

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{C},\ Re(\lambda) < 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

με λύση $y(t) = e^{\lambda t}$.

Θεωρούμε τη μέθοδο RK με μητρώο $\begin{array}{c|c} A & z \\ \hline b^T & \end{array}$, $y^0 = 1$ και θετικό βήμα h.

Το διακριτό πρόβλημα που προκύπτει από το πρόβλημα δοκιμής με τη μέθοδο RK είναι:

$$y^{n,i} = y^n + \lambda h \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, y^{n,j} \qquad i = 1, \ldots, q \qquad (1)$$

$$y^{n+1} = y^n + \lambda h \sum_{i=1}^{q} b_i\, y^{n,i} \qquad (2)$$

Η (1) γράφεται: $I_q \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} + \lambda h \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \ (I_q - \lambda h A) \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Αν υπάρχει ο $(I_q - \lambda h A)^{-1}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$(3)\ \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} = (I_q - \lambda h A)^{-1} \begin{pmatrix} y^n \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = (I_q - \lambda h \cdot A)^{-1} y^n \cdot \vec{e}, \ \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Η (2) γράφεται: $y^{n+1} = y^n + \lambda h \cdot b^T \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} \xrightarrow{(3)}$

$$y^{n+1} = y^n + \lambda \cdot h \cdot b^T (I_q - \lambda h \cdot A)^{-1} y^n \vec{e}$$
$$= \left[1 + \lambda h\, b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} \vec{e}\right] y^n.$$

όπου $b^T = (b_1, \ldots, b_q)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $r(z) = 1 + z\, b^T (I_q - zA)^{-1} \vec{e}$

Τότε $y^{n+1} = r(\lambda h) \cdot y^n$

Θέτουμε $\vec{w} = (I_q - zA)^{-1} \vec{e} \Rightarrow \overbrace{(I_q - zA)}^{:=B} \vec{w} = \vec{e}$

το οποίο είναι ένα γραμμικό σύστημα q εξισώσεων με q αγνώστους.

· Στον παρονομαστή θα έχουμε πάντα $\det B = \det(I_q - zA)$ το οποίο είναι πολυώνυμο, βαθμού το πολύ q.

· Στον αριθμητή θα έχουμε εκφράσεις των w_i, $i = 1, \ldots, q$ άρα και ο αριθμητής θα είναι πολυώνυμο, βαθμού το πολύ $q-1$.

Συμπέρασμα: Η $r(z)$ είναι ρητή συνάρτηση με αριθμητή και παρονομαστή το πολύ βαθμού q.

Ειδική περίπτωση: Άμεσες μέθοδοι RK
Ο A είναι γνήσια κάτω τριγωνικός.
Τότε για τον B, ο οποίος έχει μονάδες στην κύρια διαγώνιο, θα έχουμε: $\det B = \det(I_q - zA) = 1$.
Σε αυτή την περίπτωση ισχύει: $r \in \mathbb{P}^q$.

Υπενθύμιση
Περιοχή απόλυτης ευστάθειας:
$$S = \{ z \in \mathbb{C} : |r(z)| \leq 1 \}$$

Παρατήρηση
Για μια άμεση μέθοδο RK με τάξη ακρίβειας p και q στάδια ισχύει το εξής:
$$r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + C_{p+1} z^{p+1} +$$
$$+ C_{p+2} z^{p+2} + \dots + C_q \cdot z^q$$

Ειδική περίπτωση: $p < q$
Τότε $r(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^p}{p!}$

(πολυώνυμο Taylor βαθμού p της εκθετικής συνάρτησης γύρω από το $z=0$).

Παρατήρηση
Στην RK 4ης τάξης κάνουμε 4 συναρτησιακούς υπολογισμούς.

Υπενθύμιση Συναρτήσεις ευστάθειας.

Euler : $r(z) = 1 + z$ (ίδια με τη συνάρτηση ευστάθειας μιας ΒΚ 1ης τάξης)

Πεπλεγμένη Euler: $r(z) = \dfrac{1}{1-z}$

Πεπλεγμένες μέθοδοι τραπεζίου και μέσου: $r(z) = \dfrac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}$

Β - Ευστάθεια

Έστω ότι έχουμε το ΠΑΤ : $\begin{cases} y' = f(t,y) , & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

και έστω ότι η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz ως προς y, δηλαδή:

$$\big(f(t,y) - f(t,z) , y - z \big) \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall y, z \in \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε το διακριτό ανάλογο του ΠΑΤ με μια μέθοδο ΒΚ.

Τότε δημιουργείται φθίνουσα ακολουθία:

$$\| y^{n+1} - z^{n+1} \| \leq \| y^n - z^n \| , \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

και λέμε ότι η μέθοδος ΒΚ είναι Β-ευσταθής όπου $(\cdot , \cdot)$ το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο και $\| \cdot \|$ η Ευκλείδια νόρμα.

Αλγεβρική Ευστάθεια.

Μια μέθοδος ΒΚ λέγεται αλγεβρικά ευσταθής αν $b_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, q$ και ο $q \times q$ πίνακας Μ με στοιχεία $m_{ij} = b_i a_{ij} + b_j a_{ji} - b_i b_j$, $1 \leq i, j \leq q$ είναι μη αρνητικά ορισμένος, δηλαδή

$$\sum_{i,j=1}^{q} m_{ij} x_i x_j \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^q \quad \big(\Leftrightarrow \; (Mx, x) \geq 0 \big)$$

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)
Αν μια μέθοδος RK είναι αλγεβρικά ευσταθής, τότε είναι και B-ευσταθής
Προσοχή! Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Παραδείγματα

(1) πεπλεγμένη μέθοδος Euler $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$

$b_1 = 1 \geq 0$
$m_{11} = b_1 a_{11} + b_1 a_{11} - b_1^2 = 1 + 1 - 1 = 1 \geq 0$

Άρα είναι αλγεβρικά ευσταθής και λόγω της πρότασης είναι και B-ευσταθής.

(2) πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου $\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$

$b_1 = 1 \geq 0$
$m_{11} = b_1 a_{11} + b_1 a_{11} - b_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0 \geq 0$

Άρα είναι αλγεβρικά ευσταθής και λόγω της πρότασης είναι και B-ευσταθής.

(3) μέθοδος του τραπεζίου $\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$

$b_1 = b_2 = \frac{1}{2} \geq 0.$
$m_{11} = b_1 a_{11} + b_1 a_{11} - b_1^2 = -\frac{1}{4} < 0.$
$m_{12} = b_1 a_{12} + b_2 a_{21} - b_1 b_2 = 0$
$m_{21} = b_2 a_{21} + b_1 a_{12} - b_1 b_2 = 0$
$m_{22} = b_2 a_{22} + b_2 a_{22} - b_2^2 = \frac{1}{4} \geq 0.$

Άρα $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$. Ισχύει $(Mx, x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^2$

Άρα η μέθοδος δεν είναι αλγεβρικά ευσταθής. Αποδεικνύεται (με τον ορισμό) ότι η μέθοδος δεν είναι ούτε B-ευσταθής.

Άσκηση

Θεωρούμε το ΠΑΤ: $\begin{cases} y'(t) = 1, & t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, βήμα $h = \frac{1}{N}$ και y^N η προσέγγιση της λύσης του ΠΑΤ στο σημείο 1, την οποία δίνει μια μέθοδος RK όταν εφαρμοστεί με βήμα h. Αν υποθέσουμε ότι $y^N \to 1 = y(1)$ καθώς $N \to \infty$ να δειχτεί ότι η μέθοδος RK είναι συνεπής.

Παρατήρηση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$.

Λύση

Θεωρούμε μια μέθοδο RK με μητρώο $\begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}$ και $y^0 = 0$

Τότε:

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i \underbrace{f(t^{n,i}, y^{n,i})}_{:=1} \Rightarrow$$

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i$$

Για $n=0$: $y^1 = y^0 + h \sum_{i=1}^{q} b_i \Rightarrow y^1 = h \sum_{i=1}^{q} b_i$

Για $n=1$: $y^2 = y^1 + h \sum_{i=1}^{q} b_i \Rightarrow y^2 = 2h \sum_{i=1}^{q} b_i$

Για $n=2$ $y^3 = y^2 + h \sum_{i=1}^{q} b_i \Rightarrow y^3 = 3h \sum_{i=1}^{q} b_i$

Επαγωγικά έχουμε: $y^n = n h \sum_{i=1}^{q} b_i$

για $n=N$: $y^N = Nh \cdot \sum_{i=1}^{q} b_i$

$\xRightarrow{N\cdot h = 1}$ $y^N = \sum_{i=1}^{q} b_i$

Για $N \to \infty$ έχουμε: $y^N \to 1$

Αυτό ισχύει όταν $\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$.

Επομένως η μέθοδος RK είναι συνεπής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
Πολυβηματικές μέθοδοι

Συμβολισμοί και παραδείγματα

Θεωρούμε το ΠΑΤ : $\begin{cases} y' = f(t,y), \quad t \in [a,b]. \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Αναζητούμε μια συνάρτηση $y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ που να επαληθεύει το ΠΑΤ.

$$y_0 \in \mathbb{R}^m \quad \text{και} \quad f : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

Θεωρούμε τη διαμέριση με βήμα $h = \dfrac{b-a}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ και $t^n = a + nh$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Παράδειγμα διβηματικής μεθόδου.

$$\begin{cases} y^0, y^1 \quad \text{(δεδομένα)} \\ y^{n+2} - y^n = 2h f(t^{n+1}, y^{n+1}) \end{cases}$$

Χρειαζόμαστε τη τιμή της συνάρτησης σε δύο σημεία.

Παρατήρηση

Οι πολυβηματικές μέθοδοι έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια από τις μονοβηματικές.

Προσέγγιση της μεθόδου.

1ος τρόπος: παραγώγιση.

Θεωρούμε τη ΣΔΕ $y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y^{n+1})$.

Υπενθύμιση (πεπερασμένες διαφορές)

- Εμπρόσθιες πεπερασμένες διαφορές.

$$y'(t^n) = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

Με εμπρόσθιες πεπερασμένες διαφορές προσεγγίζεται η πεπλεγμένη μέθοδος Euler.

- Οπίσθιες πεπερασμένες διαφορές

$$y'(t^{n+1}) = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

Με οπίσθιες πεπερασμένες διαφορές προσεγγίζεται η άμεση μέθοδος Euler.

- Κεντρικές πεπερασμένες διαφορές

$$y'(t^i) = \frac{y(t^{i+1}) - y(t^{i-1})}{2h}$$

Με κεντρικές πεπερασμένες διαφορές προσεγγίζονται οι πολυβηματικές μέθοδοι,

δηλαδή,

εφαρμόζοντας κεντρικές πεπερασμένες διαφορές στη ΣΔΕ $y'(t^{n+1}) = f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$ έχουμε:

$$\frac{y(t^{n+2}) - y(t^n)}{2h} \simeq f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

$$\Longrightarrow \quad y(t^{n+2}) - y(t^n) \simeq 2h f(t^{n+1}, y(t^{n+1}))$$

$$\Longrightarrow \quad y^{n+2} - y^n = 2h f(t^{n+1}, y^{n+1})$$

2ος τρόπος : αριθμητική ολοκλήρωση

Έστω ότι έχουμε τη ΣΔΕ : $y'(t) = f(t, y(t))$
Ολοκληρώνοντας στο $[t^n, t^{n+2}]$ έχουμε:

$$\int_{t^n}^{t^{n+2}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt \Rightarrow$$

(1) $$y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt \simeq 2h f(t^{n+1}, y^{n+1})$$

(από τη μέθοδο του μέσου).

[Υπενθύμιση [κανόνας Simpson].

$$\int_c^d f(t)\,dt = \frac{d-c}{6}\left[f(c) + 4 f\left(\frac{d+c}{2}\right) + f(d)\right]$$]

(2) $$y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f(t, y(t))\,dt \simeq \frac{h}{3}\left[f(t^n, y^n) + 4 f(t^{n+1}, y^{n+1}) + f(t^{n+2}, y^{n+2})\right]$$

(από τον κανόνα του Simpson)

Στην περίπτωση (2) το αριθμητικό σχήμα είναι:

$$\begin{cases} y^0, y^1 \quad \text{(δεδομένα)} \\ y^{n+2} - y^n = \frac{h}{3}\left[f(t^n, y^n) + 4 f(t^{n+1}, y^{n+1}) + f(t^{n+2}, y^{n+2})\right] \end{cases}$$

↳ πεπλεγμένη μέθοδος (διβηματική)

Γενικά για k-βηματικές μεθόδους που περιγράφονται από $2k+2$ σταθερές: $a_0, a_1, \dots, a_k, b_0, b_1, \dots, b_k$ το αριθμητικό σχήμα είναι:

$$\begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \quad (k \text{ δεδομένα}) \\ a_k y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + a_0 y^n = h(b_k f^{n+k} + b_{k-1} f^{n+k-1} \\ \quad + \dots + b_0 f^n), \quad n = 0, 1, \dots N-k. \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι $a_k \neq 0$ (συνήθως θεωρούμε $a_k = 1$) και $|a_0| + |b_0| > 0$ έτσι ώστε να έχουμε k-βηματική μέθοδο. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(1) Αν $\underline{b_k = 0}$ τότε η μέθοδος είναι άμεση και ο προσδιορισμός των y^{n+k} γίνεται με αντικατάσταση των προηγούμενων γνωστών τιμών $y^n, y^{n+1}, \dots, y^{n+k-1}$

(2) Αν $\underline{b_k \neq 0}$ τότε η μέθοδος είναι πεπλεγμένη και για τον προσδιορισμό του y^{n+k} πρέπει να λυθεί ένα μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων.

Σύγκριση πολυβηματικών μεθόδων - μεθόδων RK.

Πλεονεκτήματα πολυβηματικών μεθόδων.

(1) Οι πολυβηματικές μέθοδοι είναι λιγότερο δαπανηρές (απαιτούν λιγότερους συναρτησιακούς υπολογισμούς) από τις μεθόδους RK.

(2) Στις <u>άμεσες</u> πολυβηματικές μεθόδους απαιτείται σε κάθε βήμα ένας υπολογισμός της f.

Στις <u>πεπλεγμένες</u> πολυβηματικές μεθόδους απαιτείται η λύση ενός μη γραμμικού συστήματος $m \times m$. Για την αντίστοιχη RK, το μη γραμμικό σύστημα θα ήταν $qm \times qm$.

Μειονέκτημα πολυβηματικών μεθόδων

Οι πολυβηματικές μέθοδοι υστερούν όσον αφορά τις ιδιότητες ευστάθειας σε σχέση με τις μεθόδους RK.

15/12/14

Επανάληψη προηγούμενου μαθήματος.

Γενική μορφή μιας k-βηματικής μεθόδου

$$(1)\begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ a_k y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + a_0 y^n = h[b_k f^{n+k} + b_{k-1} f^{n+k-1} \\ \qquad + \dots + b_0 f^n], \quad n=0,1,\dots,N-k \end{cases}$$

με $a_k \neq 0$
(συνήθως θεωρούμε $a_k = 1$)

Παρατήρηση.

- Αν $b_k = 0$ η k-βηματική μέθοδος είναι άμεση.
- Αν $b_k \neq 0$ η k-βηματική μέθοδος είναι πεπλεγμένη.

(καινούρια ύλη)

Συστηματική κατασκευή πολυβηματικών μεθόδων.

Έστω $p_{n,k}$ πολυώνυμο βαθμού το πολύ k, τέτοιο ώστε $p_{n,k}(t^{n+i}) = y(t^{n+i})$, $i=0,1,\dots,k$.

Αν στη σχέση $y'(t^{n+k}) = f(t^{n+k}, y(t^{n+k}))$ προσεγγίσουμε την παράγωγο $y'(t^{n+k})$ με την παράγωγο του $p_{n,k}$ δηλαδή με $p'_{n,k}(t^{n+k})$, τότε θα οδηγηθούμε στη μέθοδο:

$$(2)\begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y^{n+k} = h f^{n+k}, \quad n=0,1,\dots,N-k \end{cases}$$

όπου $\nabla^1 y^n = y^n - y^{n-1}$

$$\nabla^j y^n = \nabla(\nabla^{j-1} y^n)$$

Υπενθύμιση [Λογισμός Διαφορών].

- Δ: τελεστής εμπρόσθιων διαφορών.

$$\Delta y^{n+k} = y^{n+k+1} - y^{n+k}$$

- ∇: τελεστής ανάδρομων διαφορών.

$$\nabla y^{n+k} = y^{n+k} - y^{n+k-1}$$

π.χ $\nabla^2 y^n = \nabla(\nabla y^n) = \nabla(y^n - y^{n-1}) = \nabla y^n - \nabla y^{n-1}$

$= y^n - y^{n-1} - (y^{n-1} - y^{n-2}) = y^n - 2y^{n-1} + y^{n-2}$.

Παραδείγματα.

(1) $k=1$. $\quad \nabla y^{n+1} = h f^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$

$$\Rightarrow y^{n+1} - y^n = h f^{n+1}$$

$a_1 = 1, \quad a_0 = -1, \quad b_1 = 1, \quad b_0 = 0$

Πρόκειται για την πεπλεγμένη μέθοδο Euler.

[Παρατήρηση.
Η άμεση μέθοδος Euler είναι μια k-βηματική μέθοδος με $k=1$ και $a_1 = 1, a_0 = 0, b_1 = 0, b_0 = 1$]

(2) $k=2$. $\quad \nabla y^{n+2} + \frac{1}{2}\nabla^2 y^{n+2} = h f^{n+2} \quad n = 0, 1, \dots N-2$

$$\Rightarrow y^{n+2} - y^{n+1} + \frac{1}{2}\nabla(y^{n+2} - y^{n+1}) = h f^{n+2}$$

$$\Rightarrow y^{n+2} - y^{n+1} + \frac{1}{2}(y^{n+2} - y^{n+1} - y^{n+1} + y^n) = h f^{n+2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2} y^n = h f^{n+2}$$

$$\Rightarrow y^{n+2} - \frac{4}{3} y^{n+1} + \frac{1}{3} y^n = \frac{2}{3} h f^{n+2}$$ Άρα $a_2 = 1$, $a_1 = -4/3$, $a_0 = 1/3$, $b_2 = 2/3$, $b_1 = b_0 = 0$.

Δηλαδή παίρνουμε τη μέθοδο:

$$\begin{cases} y^{n+2} - \frac{4}{3} y^{n+1} + \frac{1}{3} y^n = \frac{2}{3} h f^{n+2} \\ y^0, y^1 \text{ δεδομένα} \end{cases}$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ADAMS

Είναι οι k-βηματικές μέθοδοι της μορφής:

$$(3) \begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ \underbrace{y^{n+k} - y^{n+k-1}}_{\nabla y^{n+k}} = \underbrace{h \sum_{j=0}^{k} b_j f^{n+j}}_{h(b_k f^{n+k} + b_{k-1} f^{n+k-1} + \dots + b_0 f^n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-k \end{cases}$$

Παρατήρηση

- Αν $b_k = 0$, οι μέθοδοι λέγονται Adams-Bashforth και είναι άμεσες.
- Αν $b_k \neq 0$, οι μέθοδοι λέγονται Adams-Moulton και είναι πεπλεγμένες.

<u>Παράδειγμα άμεσης μεθόδου Adams</u> $(k=2)$

$$y^{n+2} - y^{n+1} = h\left(\frac{3}{2} f^{n+1} - \frac{1}{2} f^n\right)$$

<u>Παράδειγμα πεπλεγμένης μεθόδου Adams</u> $(k=2)$

$$y^{n+2} - y^{n+1} = h\left(\frac{5}{12} f^{n+2} + \frac{2}{3} f^{n+1} - \frac{1}{12} f^n\right)$$

Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων.

Γενικός ορισμός

Μια k-βηματική μέθοδος που περιγράφεται από τις σταθερές $a_k, \dots, a_0, b_k, \dots, b_0$ λέγεται ευσταθής αν $\exists\, C$ που εξαρτάται από την f αλλά είναι ανεξάρτητη του N, τέτοια ώστε για τις ακολουθίες (y^n), (z^n) με:

$$\begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \quad \text{δεδομένα} \\ a_k y^{n+k} + a_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + a_0 y^n = h[b_k \underbrace{f^{n+k}}_{f(t^{n+k}, y^{n+k})} + \dots + b_0 \underbrace{f^n}_{f(t^n, y^n)}], \quad n = 0, 1, \dots, N-k \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^0, z^1, \dots, z^{k-1} \quad \text{δεδομένα} \\ a_k z^{n+k} + a_{k-1} z^{n+k-1} + \dots + a_0 z^n = h[b_k f(t^{n+k}, z^{n+k}) + \\ \qquad + \dots + b_0 f(t^n, z^n)], \quad n = 0, 1, \dots, N-k \end{cases}$$

να ισχύει: $\max\limits_{0 \le n \le N} |y^n - z^n| \le C \cdot \max\limits_{0 \le j \le k-1} |y^j - z^j|$

Ορισμός συνθήκης των ριζών.

Η πολυβηματική μέθοδος:

$$(1) \begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \quad \text{δεδομένα} \\ a_k y^{n+k} + \dots + a_0 y^n = h[b_k f^{n+k} + \dots + b_0 f^n] \end{cases}$$

πληροί τη συνθήκη των ριζών αν για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ρ που ορίζεται ως:

$\rho(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \dots + a_0 z^0$ ισχύουν τα εξής:

- $\rho(z) = 0 \Rightarrow |z| \le 1$
- $\rho(z) = \rho'(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1$

δηλαδή όλες οι ρίζες του ρ έχουν απόλυτη τιμή όχι μεγαλύτερη του 1 και αν έχουν απόλυτη τιμή 1 τότε είναι απλές ρίζες.

Παράδειγμα - παρατήρηση

Έστω η διβηματική μέθοδος:

y^0, y^1 δεδομένα

$$a_2 y^{n+2} + a_1 y^{n+1} + a_0 y^n = h[b_2 f^{n+2} + b_1 f^{n+1} + b_0 f^n]$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$p(y) = a_2 y^2 + a_1 y + a_0$

και οι ρίζες του υπολογίζονται από την εξίσωση $p(y) = 0$.

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)

Αν μια πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής, τότε το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών, και αντίστροφα αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μιας μεθόδου ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών τότε η μέθοδος είναι ευσταθής. (Butcher, Dahlquist).

Τάξη ακρίβειας και συνέπεια πολυβηματικών μεθόδων

Για το ΠΑΤ : $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$ ορίζουμε την ποσότητα

$$(L_h y)(t) = \sum_{j=0}^{k} [a_j y(t+jh) - h b_j y'(t+jh)]$$

Παρατήρηση

Αντικαθιστώντας στην πολυβηματική μέθοδο (1) την τιμή της ακριβούς λύσης στο αντίστοιχο σημείο, προκύπτει ένα σφάλμα (σφάλμα συνέπειας). Η ποσότητα $(L_h y)(t)$ είναι το μέτρο αποτυχίας της ακριβούς λύσης να ικανοποιήσει την (1) στο σημείο t.

Το $(L_h y)(t)$ είναι ανάλογο του τοπικού σφάλματος:
$\delta^n = y(t^{n+1}) - \underbrace{y^{n+1}}$ για τις μεθόδους RK.

$$y(t^n) + h\,\Phi(t^n, y(t^n); h)$$

Υπενθύμιση.

Συνεχές πρόβλημα

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

- Διακριτό ανάλογο με πολυβηματική μέθοδο

$$\begin{cases} y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \text{ δεδομένα} \\ a_k y^{n+k} + \dots + a_0 y^n = h\,[b_k f^{n+k} + \dots + b_0 f^n] \end{cases}$$

- Διακριτό ανάλογο με RK q βημάτων

$$\left.\begin{cases} y^0 = y_0 \\ y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \quad i = 1, \dots, q \\ y^{n+1} = y^n + h \sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}\right\} n = 0, \dots, N-1$$

- Διακριτό ανάλογο με την άμεση Euler

$$\begin{cases} y^0 \text{ δεδομένο} \\ y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n) \end{cases}$$

- Διακριτό ανάλογο με την πεπλεγμένη Euler

$$\begin{cases} y^0 \text{ δεδομένο} \\ y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1}) \end{cases}$$

Ορισμός

Έστω $y:[a,b] \to \mathbb{R}$ ομαλή συνάρτηση (δηλαδή συνεχής με συνεχείς παραγώγους ανώτερης τάξης)
Αν p είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο ισχύει: $\exists\, C = C(y) \quad \forall t \in [a, b-kh] \quad |(L_h y)(t)| \leq C h^{p+1}$
τότε λέμε ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου είναι p.

Αν η τάξη της πολυβηματικής μεθόδου είναι τουλάχιστον 1 $(p \geq 1)$ τότε η μέθοδος λέγεται συνεπής.

Ερώτημα: Πως υπολογίζεται το p;

Απάντηση:
Αναπτύσσοντας κατά Taylor τις $y(t+jh)$ και $y'(t+jh)$ ως προς t, θα έχουμε:

$$(L_h y)(t) = C_0\, y(t) + C_1\, h \cdot y'(t) + C_2 h^2 y''(t) + \ldots$$

όπου C_j, $j = 0,1,2,\ldots$ σταθερές ανεξάρτητες των y, t, h.
Τότε η πολυβηματική μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας p ακριβώς αν $C_0 = C_1 = \ldots = C_p = 0$, $C_{p+1} \neq 0$ όπου:

$$C_0 = a_0 + a_1 + \ldots + a_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$$

$$C_1 = a_1 + 2a_2 + \ldots + k a_k - (b_0 + b_1 + \ldots + b_k)$$

για $j \geq 2$
$$C_j = \frac{1}{j!}\left(a_1 + 2^j a_2 + 3^j a_3 + \ldots + k^j a_k\right) - \frac{1}{(j-1)!}\left(b_1 + 2^{j-1} b_2 + 3^{j-1} b_3 + \ldots + k^{j-1} b_k\right)$$

Υπενθύμιση (RK)

Μια μέθοδος RK q-βημάτων είναι συνεπής $(p \geq 1)$ αν-ν $\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$.

Συμπέρασμα

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη συνέπεια της μεθόδου ($p \geq 1$) είναι να ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases} C_0 = a_0 + a_1 + \dots + a_k = 0 \\ C_1 = a_1 + 2a_2 + \dots + k a_k - (b_0 + b_1 + \dots + b_k) = 0 \end{cases}$$

Άσκηση

Υπολογίζοντας τις σταθερές C_j για τις πολυβηματικές μεθόδους, να δειχτεί ότι η τάξη ακρίβειας της πεπλεγμένης Euler είναι 1.

Λύση

Η πεπλεγμένη μέθοδος Euler δίνει:

$$\begin{cases} y^{n+1} - y^n = h f(t^{n+1}, y^{n+1}) \\ y_0 = y^0 \end{cases}$$

Άρα $a_1 = 1$, $a_0 = -1$, $b_1 = 1$, $b_0 = 0$

Επομένως έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= a_0 + a_1 = -1 + 1 = 0 \\ C_1 &= a_1 - b_0 - b_1 = 1 - 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Η μέθοδος είναι συνεπής}$$

<u>Ερώτημα</u>: ποια είναι η τάξη ακρίβειας της;

$$C_2 = \frac{1}{2!} \cdot 1 - \frac{1}{1!} \cdot 1 = -\frac{1}{2} \neq 0$$ Άρα $p = 1$.

Άσκηση

Με τη βοήθεια των σταθερών C_j να δειχτεί ότι η τάξη ακρίβειας της μεθόδου του τραπεζίου είναι 2.

Λύση

Το διακριτό ανάλογο με τη μέθοδο του τραπεζίου είναι:

$$\begin{cases} y^{n+1} - y^n = \frac{h}{2} [f(t^{n+1}, y^{n+1}) + f(t^n, y^n)] \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

Άρα $a_1 = 1$, $a_0 = -1$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_0 = \frac{1}{2}$.

Επομένως έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= a_0 + a_1 = -1 + 1 = 0 \\ C_1 &= a_1 - b_0 - b_1 = 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Η μέθοδος είναι συνεπής.}$$

<u>Ερώτημα</u>: ποια είναι η τάξη ακριβείας της;

$$C_2 = \frac{1}{2!} \cdot 1 - \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$C_3 = \frac{1}{3!} \cdot 1 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \neq 0 \quad \text{Άρα } p = 2.$$

ΣΥΝΟΠΤΙΚΑ

1ο ΜΑΘΗΜΑ

ΑΕΣΔΕ

(1) Ανάπτυγμα Taylor (για συναρτήσεις (i) μιας μεταβλητής (ii) πολλών μεταβλητών)

(2) Πότε ένα σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι: (i) ανοιχτό (ii) κυρτό

(3) ε-δ ορισμός συνέχειας (για συναρτήσεις (i) μιας μεταβλητής (ii) πολλών μεταβλητών).

2ο ΜΑΘΗΜΑ

(1) Πότε μια συνάρτηση είναι λύση ενός Π.Α.Τ.

(2) παράδειγμα 1. Να μελετηθεί το ΠΑΤ: $\begin{cases} y'(t) = y^2, & 0 \le t \le 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

(1 λύση στο $[0,1)$, καμία στο $[1,2]$.

Παράδειγμα 2. Να μελετηθεί το ΠΑΤ: $\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

(προφανής λύση: $y(t)=0$. 2η λύση: $y(t)=\frac{t^2}{4}$, $t\in[0,1]$)

(3) Θεώρημα Ολικής Ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης του ΠΑΤ. (ΘΜΤ)

(4) Αν η f_y είναι φραγμένη τότε η f πληροί την ολική συνθήκη Lipschitz.

(5) Θεώρημα Τοπικής Ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης του ΠΑΤ.

(6) παρατήρηση Στο παράδειγμα 2 η f_y δεν είναι φραγμένη γι' αυτό το ΠΑΤ δεν έχει μοναδική λύση. Δεν ισχύει το Θ. τοπικής $\exists$ και !)

(7) Ευστάθεια λύσης του ΠΑΤ όταν η f πληροί την ολική Lipschitz (+απόδειξη)

3ο ΜΑΘΗΜΑ

(1) Ευστάθεια λύσης του ΠΑΤ όταν η f πληροί τη μονόπλευρη Lipschitz. (+απόδειξη)

Παρατήρηση Η f πληροί τη μονόπλευρη Lipschitz $\Rightarrow$ είναι φθίνουσα.

(2) Αν το ΠΑΤ έχει λύση και η f πληροί τη μονόπλευρη Lipschitz τότε η λύση είναι μοναδική (+απόδειξη)

(3) Αν η f πληροί τη μονόπλευρη Lipschitz τότε η y είναι φραγμένη και άρα υπάρχει ολική λύση του ΠΑΤ. (+απόδειξη)

(4) Προβλήματα δοκιμής

(1) $\begin{cases} y'(t) = \lambda(t)\cdot y(t) + \mu(t), & t\in[a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Αν $\lambda(t) \le 0$, $t\in[a,b]$ τότε ικανοποιείται η μονόπλευρη Lipschitz (μπορούμε να αγνοήσουμε το $\mu(t)$)

(2) (ειδική περίπτωση του (1))

$\begin{cases} y'(t) = \lambda y(t), & t\in[0,b] \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Αν $\lambda \le 0$ τότε η λύση του ΠΑΤ: $y(t) = e^{\lambda t}$, $t\in[0,b]$ είναι φραγμένη

(5) Συστήματα ΣΔΕ $\begin{cases} y' = F(t, y(t)),\ t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$, $y \in \mathbb{R}^m$, $F : ([a,b], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$

Ισχύουν τα ίδια θεωρήματα ύπαρξης & μοναδικότητας + ευστάθειας με τη διαφορά ότι αντί για απόλυτες τιμές χρησιμοποιούμε νόρμες.

(6) Πρόταση ΠΑΤ με ΣΔΕ ανώτερης τάξης μπορούν να γραφούν ως συστήματα ΣΔΕ α' τάξης (πως;)

(7) πρόβλημα δοκιμής για γραμμικό σύστημα ΣΔΕ

(1) $\begin{cases} y'(t) = A(t) \cdot y(t) + g(t),\ t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

Αν ο A είναι μη θετικά ορισμένος, δηλ $(AX, X) \le 0\ \forall X \in \mathbb{R}^m$ τότε ικανοποιείται η μονόπλευρη Lipschitz

(2) (ειδική περίπτωση του (1))

$\begin{cases} y' = \lambda y,\ t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$, $\lambda = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Έχουμε $(y_1 + y_2 i)' = (\alpha + \beta i)(y_1 + y_2 i) \Leftrightarrow$

$$y_1' + y_2' i = (\alpha y_1 - \beta y_2) + (\alpha y_2 + \beta y_1) i$$

Άρα $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Ο A είναι μη θετικά ορισμένος αν-ν $Re(\lambda) = \alpha \le 0$.

4º ΜΑΘΗΜΑ

(1) Ασκήσεις στο 1º κεφάλαιο

(2) Βασικές έννοιες στις Ε.Δ. (επίλυση ομογενούς ΕΔ με σταθερούς συντελεστές)

(3) Άμεση μέθοδος Euler. Η κατασκευή της. (3 τρόποι)

(4) Συνέπεια - τοπικό σφάλμα της Euler. (+απόδειξη) $(O(h^2))$

5º ΜΑΘΗΜΑ

(1) Ευστάθεια της άμεσης μεθόδου Euler (+απόδειξη)

(2) Λήμμα Αν δ θετικός και $k, d_0, d_1 \dots$ μη αρνητικοί με $d_{i+1} \le (1+\delta) d_i + k$, $i = 0, 1, \dots$ τότε $d_n \le d_0 \cdot e^{n\delta} + k \dfrac{e^{n\delta} - 1}{\delta}$, $n = 0, 1 \dots$ (+απόδειξη)

(3) Ακρίβεια της άμεσης μεθόδου Euler (+απόδειξη) $(O(h))$

(4) Παράδειγμα

6ο ΜΑΘΗΜΑ

(1) Συνέπεια της άμεσης Euler για συστήματα ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης $(O(h^2))$
(i) με τη $\|\cdot\|_\infty$ (ii) με τυχαία νόρμα $\|\cdot\|$ (Ισχύει $\|\cdot\| \le C\|\cdot\|_\infty$ για κάποιο $C>0$)

(2) Ακρίβεια - Ολικό σφάλμα της άμεσης Euler για συστήματα ΣΔΕ $1^{ης}$ τάξης ΧΑ

(3) Περιοχή απόλυτης ευστάθειας της άμεσης Euler
θεωρώντας το ΠΑΤ $\begin{cases} y'=\lambda y & t\geq 0,\ Re(\lambda)<0 \\ y(0)=1 \end{cases}$ (πρόβλημα δοκιμής)
το διακριτοποιούμε με την άμεση Euler και απαιτούμε οι προσεγγίσεις να είναι φραγμένες.

(4) Πεπλεγμένη μέθοδος Euler. Η κατασκευή της (προσέγγιση παραγώγου με οπισθιες διαφορές)

(5) Συνέπεια - τοπικό σφάλμα πεπλεγμένης Euler. $(O(h^2))$ Χ.Α

(6) Ευστάθεια της πεπλεγμένης Euler (+απόδειξη) $(O(h))$
(αν $hL<\frac{1}{2}$ τότε $\frac{1}{1-hL} \le 1+2hL$)

(7) Περιοχή απόλυτης ευστάθειας της πεπλεγμένης Euler.

(8) Ακρίβεια της πεπλεγμένης Euler (Χ.Α.) $(O(h))$

7ο ΜΑΘΗΜΑ

(1) Η πεπλεγμένη μέθοδος του κανόνα του τραπεζίου.

(2) Ασκήσεις

8ο ΜΑΘΗΜΑ

(1) Παρατήρηση Αν η f πληροί τη συνθήκη Lipschitz (με L) και θεωρήσουμε τη $g(x) = y^n + hf(t^n, x)$ (προκύπτει από την πεπλεγμένη Euler) τότε η g είναι συστολή αν-ν $hL<1$ και τότε έχει 1 τουλάχιστον σταθερό σημείο (το y^{n+1}) και άρα οι προσεγγίσεις υπάρχουν. και επειδή η f πληροί τη συνθήκη Lipschitz είναι και μοναδικές).
Προσοχή! Αν $f(t,y)=\lambda y$, η πεπλεγμένη Euler δεν είναι καλά ορισμένη αν $h=\frac{1}{\lambda}$ διότι οι προσεγγίσεις δεν υπάρχουν ή είναι άπειρες.

(2) Ακρίβεια της πεπλεγμένης Euler αν η f του Π.Α.Τ πληροί τη μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz (Χ.Α).

(3) Περιοχή απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου του τραπεζίου.

(4) Η μέθοδος του μέσου

(5) Πότε μια μέθοδος λέγεται B-ευσταθής;

(6) Η μέθοδος του μέσου είναι B-ευσταθής (+Απόδειξη).

(7) Μέθοδοι Runge-Kutta. Πότε μια μέθοδος RK είναι άμεση;

Η κατασκευή της μεθόδου. 2 παραδείγματα (Δίνεται το μητρώο, να γραφούν οι αναδρομικές σχέσεις)

9ο ΜΑΘΗΜΑ

Παραδείγματα μεθόδων Runge-Kutta (συνέχεια)

10ο ΜΑΘΗΜΑ

(1) Πρόταση για την ύπαρξη και μοναδικότητα προσεγγίσεων μιας μεθόδου RK.

(προϋποθέσεις: $\underbrace{hL \cdot \max_{1\le i\le q} \sum_{j=1}^{q} |a_{ij}|}_{\gamma} < 1$ και η f πληροί την ολική Lipschitz).

(2) Η μέθοδος του Νεύτωνα (i βαθμωτή, ii διανυσματική περίπτωση)

(3) Ευστάθεια μεθόδων RK (ίδιες προϋποθέσεις με (1), λήμμα) (+Απόδειξη)

[Ισχύει $\max_{1\le n\le N} |y^n - z^n| \le C_1 |y_0 - z_0| + \frac{C_2}{h} \max_{0\le n\le N-1} |\rho^n|$, $C_1 = e^{c'(b-a)}$,

$C_2 = \frac{C_1 - 1}{C'}$, $C' = LC \sum_{i=1}^{q} |b_i|$, $C = \frac{1}{1-h_0\cdot\gamma}$, $h_0 = \frac{1}{\gamma}$]

(4) Συνέπεια - τοπικό σφάλμα μεθόδων RK

(5) Ορισμός τάξης ακρίβειας μιας μεθόδου RK.

(6) Η ακρίβεια - ολικό σφάλμα μεθόδων RK

[Ισχύει $\max_{0\le n\le N} |y(t^n) - y^n| \le \frac{\tilde{C}}{C'}\left[e^{c'(b-a)} - 1\right]\cdot h^p$ όπου

p η τάξη ακρίβειας, $C' = LC \sum_{i=1}^{q} |b_i|$ (+Απόδειξη)]

(7) Σημαντική άσκηση: Η τάξη ακρίβειας μιας μεθόδου RK είναι $p \ge 1$ $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{q} b_i = 1$.

Αν $p \ge 1$ η μέθοδος λέγεται συνεπής

11ο ΜΑΘΗΜΑ

(1) Σημαντικές ασκήσεις (2) Νδο η τάξη ακρίβειας δοθείσας μεθόδου RK είναι ακριβώς p.

(2) Περιοχή απόλυτης ευστάθειας μεθόδων RK

[Ισχύει $y^{n+1} = \left[1 + \lambda h b^T (I_q - \lambda h A)^{-1} \vec{e}\,\right] y^n$

θεωρώ τη $r(z) = 1 + z b^T (I_q - zA)^{-1} \vec{e}$. θέτω $(I_q - zA)^{-1} \vec{e} = \vec{w}$

$\Rightarrow (I_q - zA)\vec{w} = \vec{e}$: γρ. σύστημα $(q \times q)$ ⇒ Η $r(z)$ είναι ρητή συνάρτηση

με παρονομαστή $\det(I_q - zA)$: πολυώνυμο βαθμού το πολύ q.]

(3) Πότε μια μέθοδος RK λέγεται αλγεβρικά ευσταθής;

(4) Πρόταση Αν μια μέθοδος RK είναι αλγεβρικά ευσταθής, τότε είναι και B-ευσταθής. ΧΑ. Προσοχή! Το αντίστροφο δεν ισχύει.

(5) Παραδείγματα. Άσκηση

(6) Πολυβηματικές μέθοδοι. Η προσέγγισή τους:

(i) με παραγώγιση — μέθοδος μέσου

(ii) με ολοκλήρωση — μέθοδος Simpson

(7) Γενική μορφή πολυβηματικών μεθόδων.
πότε μια πολυβηματική μέθοδος είναι άμεση; πότε πεπλεγμένη;

(8) Πλεονεκτήματα-μειονεκτήματα πολυβηματικών μεθόδων (σε σχέση με τις μεθόδους RK)

12ο ΜΑΘΗΜΑ

(1) Συστηματική προσέγγιση πολυβηματικών μεθόδων.

$$\left[p_{n,k}(t^{n+i}) = y(t^{n+i}) \quad , i = 0, \dots, k \right]$$

(2) Παραδείγματα

(3) Μέθοδοι Adams

(4) Ευστάθεια πολυβηματικών μεθόδων

Συνθήκη των ριζών

Πρόταση μια πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής αν-ν ικανοποιείται η συνθήκη των ριζών.

(5) Ορισμός τάξης ακρίβειας μιας πολυβηματικής μεθόδου.

$$\left[(L_h y)(t) = \sum_{j=0}^{k} \left[a_j y(t + jh) - h b_j y'(t + jh) \right] \right]$$

(6) Υπολογισμός τάξης ακρίβειας μιας πολυβηματικής μεθόδου.

(7) Πότε μια πολυβηματική μέθοδος είναι συνεπής $(p \geq 1)$;